NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. H. LÉAUTÉ,

INGÉNIEUR DES MANUFACTURES DE L'ÉTAT,
RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
LAURÉAT DE L'INSTITUT (PRIX PONCELET).

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1885

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. H. LÉAUTÉ.

A titre de renseignement, j'ai cru devoir réunir au commencement de cette Notice les quelques Mémoires de Mathématiques que j'ai publiés au début de ma carrière scientifique. Ils sont très peu nombreux, car les fonctions d'Ingénieur que j'ai eu à remplir après ma sortie de l'École Polytechnique m'ont amené très vite à diriger mes études vers la Mécanique et ses applications.

TRAVAUX D'ANALYSE.

1. Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel relatif aux fonctions elliptiques.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 13 juillet 1874.

Ce Mémoire contient l'exposé d'une méthode géométrique, fondée sur des considérations de perspective et permettant de passer, de la courbe plane du quatrième degré qui intervient dans l'application du théorème d'Abel aux fonctions elliptiques, aux courbes du second degré, par l'intermédiaire de la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré. J'arrive ainsi à représenter la position d'un point d'une conique donnée par un certain argument elliptique. Le module de l'intégrale correspondante reste d'ailleurs

quelconque et cette indétermination peut être mise à profit dans un grand nombre de questions.

De cette manière, j'obtiens immédiatement les théorèmes de Poncelet sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à des coniques ayant quatre points communs.

2. Sur quelques applications aux courbes du second degré du théorème d'Abel, relatif aux fonctions elliptiques (second Mémoire).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 7 septembre 1874.

Je donne dans ce Travail les formules qui expriment les coordonnées d'un point d'une conique en fonction du *sin am* de l'intégrale elliptique relative à ce point. Par suite du mode de représentation adopté, les expressions ainsi obtenues sont rationnelles.

J'en déduis l'équation des coniques enveloppes du côté qui ferme le polygone de Poncelet sous une forme entièrement analogue à celle donnée par Jacobi dans son Mémoire sur les cercles et que l'on rencontre en Mécanique dans l'étude du mouvement du pendule. Cette forme permet d'obtenir pour des coniques quelconques des conséquences analogues à celles obtenues par Jacobi dans le cas des cercles.

Par une transformation du second degré, j'arrive ensuite à une représentation beaucoup plus simple qui conduit immédiatement aux formules données par M. Hermite ([1]) et à celles indiquées par M. Moutard ([2]) où figurent les fonctions Θ et H.

3. Sur un Mémoire de M. Catalan relatif à l'addition des fonctions elliptiques.

Mémoires de l'Académie de Toulouse, t. VI, p. 720; 1874.

Ayant été chargé par l'Académie de Toulouse de faire un Rapport sur le Mémoire de M. Catalan relatif à l'addition des fonctions elliptiques, j'ai cru devoir tout d'abord rappeler les différentes méthodes qui depuis Euler ont été successivement imaginées et les rapprocher de façon à faire ressortir leurs analogies; après ce résumé historique, je compare la méthode de

([1]) Hermite, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, janvier 1871, p. 21.

([2]) Moutard, *Application d'Analyse et de Géométrie de Poncelet*, p. 535.

M. Catalan avec celle de M. Despeyrous et je montre comment, tout en étant très différentes en apparence, elles ont cependant certains points communs qui les rangent en quelque sorte dans la même famille.

4. Étude géométrique de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et à trois variables.

Thèse de Doctorat soutenue devant la Faculté de Paris, 15 février 1876.

Le but de ce Travail est l'étude du problème de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et à trois variables. Cette étude, qui a été faite à un point de vue purement analytique, et dans le cas d'un nombre quelconque de variables, par Lagrange, Pfaff, Ampère, Cauchy, Jacobi, a été abordée géométriquement par Monge; mais la méthode indiquée par ce grand géomètre, juste quant aux résultats, donne lieu sur certains points aux plus sérieuses objections. La première Partie du Mémoire a pour but de signaler ces objections, d'en fixer le sens géométrique et de montrer comment on peut conserver néanmoins la méthode de Monge en substituant un raisonnement rigoureux au raisonnement de l'auteur.

Dans la seconde Partie, je donne, à l'aide de considérations géométriques, deux nouveaux procédés d'intégration, c'est-à-dire deux manières d'obtenir le système des quatre équations différentielles ordinaires simultanées à l'intégration duquel on ramène celle des équations différentielles partielles du premier ordre et j'examine les difficultés auxquelles a donné lieu la méthode de Cauchy. On sait que dans cette méthode, à côté des quatre équations qui suffisent pour fournir une solution ayant précisément le degré de généralité de la solution générale, vient s'en placer une cinquième qui se trouve être ainsi surabondante. Cauchy a voulu démontrer directement que cette équation surabondante était toujours satisfaite d'elle-même; mais sa méthode donne prise, quant à la démonstration, à une objection fondamentale, signalée pour la première fois par M. Bertrand [1]. Le premier des deux procédés d'intégration que j'indique conduit à la formule même de Cauchy, et en fixe la signification géométrique; le second, analogue à celui de M. O. Bonnet [2], est à l'abri de l'objection de M. Bertrand et

(1) Bertrand, *Comptes rendus*, t. XLV, p. 617; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, p. 156.
(2) O. Bonnet, *Comptes rendus*, t. XLV, p. 581.

permet de discuter complètement les cas particuliers auxquels s'applique cette objection.

Ces cas particuliers, dans lesquels les démonstrations de Cauchy et de Jacobi tombent en défaut, et dont la discussion approfondie constitue la troisième Partie du Mémoire, ont été l'objet d'un important Mémoire analytique de M. J.-A. Serret [1], qui a donné une expression remarquable de l'intégrale sur laquelle porte la discussion. J'établis d'une manière nouvelle la formule de M. Serret, et je démontre qu'à côté du cas étudié par ce géomètre viennent s'en placer d'autres qui peuvent donner lieu à la même difficulté. J'arrive ainsi à faire l'étude complète de tous les cas où la méthode de Cauchy tombe en défaut, à reconnaître que le problème peut devenir indéterminé et à voir les circonstances où il le devient, à démontrer enfin que les différents cas particuliers qui se peuvent présenter, tiennent non seulement à la nature particulière de la courbe par laquelle la surface intégrale est assujettie à passer, mais encore au choix des axes coordonnés.

5. Représentation des fonctions elliptiques de première espèce par les biquadratiques gauches.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 4 septembre 1876.

La première Partie de ce Travail est formée par la recherche des relations qui lient les coordonnées des points d'une biquadratique avec leurs arguments elliptiques; ces relations obtenues, je donne la signification géométrique du module, et l'extension aux surfaces et aux courbes gauches de plusieurs théorèmes de Clebsch relatifs aux courbes planes.

La seconde Partie a pour but d'exposer les conséquences de la théorie précédente pour la représentation des diverses surfaces qui passent par une biquadratique et pour la représentation d'un point d'une quadrique. Elle contient, en particulier, la généralisation des formules établies par M. Moutard, ainsi que la détermination de la surface, lieu du dernier côté d'un polygone inscrit dans la biquadratique, et dont les côtés sont assujettis à parcourir des quadriques déterminées.

La troisième Partie enfin renferme certaines applications spéciales de la méthode indiquée, et plusieurs théorèmes nouveaux sur les plans tangents et les plans osculateurs à une biquadratique.

---

(1) Serret, *Comptes rendus*, t. LIII, p. 598 et 734.

6. Étude géométrique des fonctions elliptiques de première espèce.

Journal de l'École Polytechnique, 46e cahier, 1879, p. 167.

La méthode employée dans ce Mémoire est basée sur les considérations de perspective qui m'avaient déjà servi dans le cas des courbes du second degré. Les diverses conséquences auxquelles elle conduit y sont réunies de façon à former un ensemble embrassant à la fois mes diverses Communications sur les fonctions elliptiques, et un certain nombre de théorèmes nouveaux, non encore publiés.

Je représente d'abord la position d'un point d'une biquadratique gauche par un certain argument elliptique, de sorte que les coordonnées de ce point se trouvent exprimées rationnellement à l'aide de la fonction elliptique et de sa dérivée. J'indique la signification géométrique du module et je montre comment la même courbe peut servir, par un simple changement de coordonnées, à la représentation des diverses fonctions elliptiques que l'on déduit les unes des autres à l'aide de la transformation du premier degré.

J'arrive ensuite par une transformation du second degré à une nouvelle expression des coordonnées des points de la biquadratique où figurent les trois fonctions elliptiques. La courbe étant rapportée à un tétraèdre conjugué, les coordonnées se trouvent directement proportionnelles aux quatre fonctions Θ et H et leurs rapports donnent précisément les trois fonctions elliptiques de l'argument correspondant au point considéré.

Ce mode particulier de représentation conduit à un système de coordonnées très général qui comprend à la fois le système de coordonnées elliptiques ordinaires et celui employé par Chasles, où un point d'un hyperboloïde se trouve déterminé par les deux génératrices qui s'y croisent.

Le passage de l'un à l'autre de ces systèmes est presque immédiat, et l'on obtient ainsi des démonstrations très simples d'un grand nombre de propriétés.

Dans cet ordre d'idées, l'équation des quadriques conjuguées à un même tétraèdre se met sous une forme particulière qui convient également aux quadriques circonscrites à une même biquadratique ou inscrites dans une même développable, et l'on détermine avec une égale facilité un point par l'intersection de trois surfaces du second ordre, ou un plan par les trois quadriques qu'il doit toucher simultanément. On met ainsi en évidence un double mode de génération des biquadratiques de même module qui se

présentent à la fois comme les intersections des quadriques inscrites dans la même développable, et comme les courbes de contact des développables circonscrites à un faisceau de quadriques.

Ces familles de courbes comprennent comme cas particulier les lignes de courbure des surfaces du second ordre. Comme ces dernières elles présentent des points correspondants qui se trouvent répondre à un même argument elliptique, et l'on arrive ainsi immédiatement aux beaux théorèmes de M. Darboux ([1]).

TRAVAUX DE MÉCANIQUE.

7. Du frottement de pivotement.

Thèse de Doctorat soutenue devant la Faculté de Paris, 15 février 1876.

Lorsque deux corps solides sont assujettis à rester en contact, le déplacement relatif de ces deux corps donne lieu à diverses résistances. On sait que, quel que soit ce déplacement, il peut toujours être obtenu par un glissement du point de contact et une rotation autour d'un axe passant par ce point. Cette rotation se décompose elle-même en deux autres : l'une autour d'un axe situé dans le plan tangent, ce qui constitue un roulement; l'autre autour d'un axe perpendiculaire au plan tangent, ce qui constitue un pivotement. Tout déplacement relatif de deux surfaces assujetties à rester en contact produira donc un frottement de glissement, un frottement de roulement et un frottement de pivotement.

Ce dernier frottement qui, dans certains cas spéciaux, peut acquérir une importance pratique, n'avait été l'objet d'aucune étude. Bour s'était borné à faire remarquer ([2]) qu'il subsistait en entier dans les engrenages de White et que ces engrenages étaient très improprement appelés *engrenages sans frottement:* « Si dans le pivotement, dit-il, le point de contact géométrique des deux surfaces en contact n'a aucun mouvement de glissement sur le

([1]) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*
([2]) Bour, *Cours de Mécanique et Machines*, 1er fascicule, p. 225; 2e fascicule, p. 207.

plan tangent commun, on n'en doit pas moins considérer l'élément mobile comme glissant effectivement sur ce plan tangent; tout ce qu'on peut dire, c'est que l'arc de glissement s'abaisse du premier ordre infinitésimal au second. Mais le frottement est en raison directe de la pression et celle-ci, qui se répartit dans le système actuel sur un élément infiniment petit dans tous les sens, s'accroit de son côté dans une proportion du même ordre, de sorte que le frottement ne se trouve nullement supprimé. »

Bour n'a point indiqué les moyens d'étudier ce frottement de pivotement sur lequel il appelait le premier l'attention; cette étude est subordonnée à la connaissance de la déformation de deux surfaces en contact, et ce problème fort difficile n'a été encore abordé que dans des cas très particuliers.

J'ai pu cependant obtenir des résultats suffisamment exacts pour le but que j'avais en vue, à l'aide de cette hypothèse simple faite par M. Resal pour le cas de deux sphères en contact ([1]), que la pression en chacun des points de contact est proportionnelle à la déformation correspondante de la surface que l'on considère.

Je suis ainsi conduit à une notion nouvelle, celle de la courbure relative de deux surfaces en contact. Cette courbure relative se représente géométriquement, comme la courbure ordinaire, par une courbe indicatrice qui est du second ordre et que j'appelle *indicatrice relative*.

Les courbes d'égale pression et, par suite, la courbe limite de contact se trouvent alors avoir à chaque instant pour projection sur le plan tangent commun des courbes semblables à cette indicatrice relative et la pression varie proportionnellement au carré du rapport de similitude.

Je montre comment se déforme l'indicatrice relative lorsque l'une des surfaces tourne autour de la normale commune et je donne l'expression de la résistance au pivotement qui est proportionnelle à chaque instant, d'une part à la pression totale qui applique les deux surfaces l'une contre l'autre, d'autre part au contour de l'ellipse limite de contact.

La formule très simple à laquelle j'arrive ainsi permet de calculer dans chaque cas la résistance particulière qui peut être due au pivotement.

([1]) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 196-197.

8. Sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, mars 1876. — Bulletin de la Société mathématique de France, 1876.

Le tracé par arcs de cercle des engrenages à épicycloïdes considérés par Willis, et qu'il a introduit dans la pratique des ateliers anglais, est susceptible d'un perfectionnement que je fais connaître dans ce Mémoire. Le cercle de Willis peut être remplacé par un autre cercle beaucoup plus avantageux, sans que les opérations à effectuer soient en rien altérées. Les formules gardent la même forme; les calculs ne sont pas modifiés; l'odontographe est conservé. Il suffit, en somme, de changer l'angle de cet instrument et de remplacer par une nouvelle Table celle qui a été dressée par Bour et M. Laussedat.

Je démontre qu'avec ce tracé, qui n'introduit absolument aucune complication, l'approximation est environ cinq fois plus forte qu'avec le procédé de Willis.

9. Tracé pratique du cercle qu'il convient de substituer à une courbe donnée dans une étendue finie.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 3 décembre 1877.

Il arrive souvent dans la pratique que l'on est conduit à remplacer un arc de courbe par un arc de cercle. Cette substitution se fait ordinairement à vue ou d'une manière arbitraire, de sorte que l'on obtient rarement l'approximation que l'on pourrait avoir.

J'indique les règles à suivre pour la détermination graphique du cercle qui épouse le mieux une courbe donnée dans un intervalle fini, et j'examine en particulier les deux cas les plus fréquents dans les applications, celui où l'arc considéré ne présente aucune singularité et celui où il possède un point de courbure maxima ou minima.

Cette théorie, dans laquelle je prends pour base le théorème de M. Tchebychef sur la détermination des polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro entre deux limites données, me conduit aux deux énoncés suivants:

Pour obtenir le cercle qui épouse le mieux un arc de courbe donné lorsque cet arc ne présente aucune singularité, il faut prendre pour centre le point situé sur la médiane du triangle curviligne formé par la développée et les normales

extrêmes, au quart de cette médiane compté à partir de la développée, et faire passer le cercle par le milieu de l'arc considéré.

Pour obtenir le cercle qui s'écarte le moins possible d'un arc de courbe donné quand cet arc présente un sommet en son milieu, il faut prendre pour centre le milieu de la diagonale du quadrilatère formé par les deux branches de la développée et par les deux normales extrêmes et faire passer le cercle aux trois huitièmes de la moitié d'arc.

Je donne ensuite plusieurs autres constructions du cercle cherché, équivalentes à celles qui précèdent, mais qui, selon le mode de définition de l'arc, peuvent être plus faciles à appliquer.

10. Engrenages à épicycloïdes et à développantes. Détermination du cercle à prendre pour le profil des dents.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 3 juin 1878.

Je me suis proposé dans ce Mémoire de trouver un tracé par arcs de cercle des engrenages à épicycloïdes et à développantes, c'est-à-dire d'étendre à ces différents systèmes d'engrenages les procédés approximatifs, si importants dans la pratique, que Willis n'avait indiqués que pour une famille particulière d'engrenages à épicycloïdes.

Le problème revient au fond à celui traité dans le Travail précédent, mais avec cette condition qui en change la nature et en augmente la difficulté, savoir que l'arc de courbe considéré présente alors un point de rebroussement à l'une de ses extrémités.

Dans le cas des engrenages à épicycloïdes, le cercle cherché doit passer par le point de rebroussement, puisque le profil de la dent est formé par deux arcs d'épicycloïdes se rencontrant en ce point; dans le cas des engrenages à développantes, il n'est plus assujetti à cette condition, puisque le profil de la dent est constitué en entier par une développante unique.

La méthode qui m'avait servi dans le travail précédemment cité n'est plus applicable ici, et je suis obligé, pour traiter la question, de reprendre la théorie de M. Tchebychef sur les polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro entre deux limites données. J'arrive ainsi au théorème suivant :

Pour déterminer le polynôme à coefficients indéterminés, mais complet, de la forme

$$x^{n+\varepsilon} + p_1 x^{n+\varepsilon-1} + p_2 x^{n+\varepsilon-2} + \ldots + p_n x^{\varepsilon}$$

dans lequel ε peut être nul ou non, qui s'écarte le moins possible de zéro entre deux limites de la variable, il suffit d'exprimer que les maxima compris entre ces limites sont aussi nombreux que possible, tous égaux entre eux en valeur absolue et aux valeurs limites qui ne sont pas nulles.

Ce théorème est d'ailleurs applicable aux polynômes de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-2} x^2 + p_n,$$

qui ne sont plus complets, mais où manque seulement le terme en x.

En m'appuyant sur les résultats qui viennent d'être énoncés, je trouve alors les règles suivantes pour le tracé par arcs de cercles des deux systèmes d'engrenages étudiés :

Pour remplacer, dans un engrenage à épicycloïdes, le profil théorique par l'arc de cercle qui l'épouse le mieux, il suffit de prendre pour centre le point de rencontre des deux normales à la courbe menées au $\frac{1}{8}$ et aux $\frac{13}{20}$ de la longueur de l'arc, comptés à partir du rebroussement, et de faire passer le cercle par ce point de rebroussement.

Pour obtenir, dans un engrenage à développantes, le cercle qui s'écarte le moins de la courbe des dents, il suffit de prendre pour centre le point de rencontre des deux normales à la développante menées au $\frac{1}{6}$ et aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur, comptés à partir du rebroussement, et de faire passer le cercle au point de la courbe situé au $\frac{1}{4}$ de la longueur d'arc considérée.

La première de ces règles me conduit à un procédé pratique des plus simples pour le tracé des engrenages à épicycloïdes à l'aide de deux odontographes et, dans le cas particulier des engrenages de Willis, je retrouve la méthode que j'avais indiquée déjà à la suite de l'étude directe de cette question.

11. Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1878.

Je démontre dans cette Note le théorème suivant, qui présente de l'intérêt au point de vue des systèmes articulés et que j'ai eu à appliquer dans un Travail subséquent (n° 13) :

Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan suivant une loi quelconque,

si l'on considère, à un instant donné, tous les points situés sur une droite quelconque issue du centre instantané de rotation, les diamètres des trajectoires que décrivent ces points à l'instant considéré enveloppent une conique inscrite dans le triangle rectangle formé par le diamètre de la circonférence des inflexions issu du centre instantané de rotation, par la droite considérée et par la perpendiculaire à cette droite menée par son second point d'intersection avec la circonférence des inflexions.

12. Étude sur le rapprochement de deux arcs de courbes voisins considérés dans une étendue finie. Application au cas d'un cercle et d'un arc de courbe ayant deux sommets voisins.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 24 juin 1878.

Les théories que j'avais établies précédemment au sujet de la substitution à un arc de courbe fini du cercle qui l'épouse le mieux m'avaient amené à reconnaître que, selon les singularités que présentait cet arc, on obtenait des degrés d'approximation très différents. J'étais ainsi conduit naturellement à rechercher quelles étaient les particularités qui permettaient d'augmenter le rapprochement obtenu. Cette recherche constitue la première Partie du Mémoire.

Je commence par définir d'une façon précise ce qu'il faut entendre par « ordre de rapprochement » de deux arcs de courbes dans une étendue finie. En généralisant la notion donnée par l'Analyse infinitésimale, je démontre ensuite le théorème qui suit :

Pour trouver la courbe d'espèce donnée qui s'écarte le moins possible d'un arc dans une étendue donnée, il faut exprimer que le degré du rapprochement est le plus élevé possible et que, en prenant pour origine le milieu de l'arc, la distance des deux courbes est proportionnelle au polynôme de Tchebychef de degré égal à cet ordre de rapprochement augmenté d'une unité.

En appliquant ce théorème au cas d'un cercle et d'un arc de courbe, on obtient l'énoncé ci-après :

Pour qu'un arc de courbe puisse avoir avec un cercle un rapprochement d'ordre n, il faut qu'il présente n-2 sommets.

Cette condition est nécessaire, mais n'est pas suffisante ; il est cependant un cas où elle le devient : c'est celui où l'équation qui donne les sommets est la déri-

vée troisième d'une équation dont toutes les racines sont réelles et comprises dans les limites de l'arc.

Dans ces conditions, il existe une infinité de cercles ayant avec l'arc de courbe un rapprochement d'ordre n et celui d'entre eux qui présente le plus grand rapprochement du n^{ieme} ordre est fourni par le théorème énoncé précédemment.

La deuxième Partie du Travail est consacrée à l'examen du cas particulier, très important dans les applications, où l'arc donné a deux sommets. On voit qu'alors il y a une infinité de cercles ayant avec lui un rapprochement du quatrième ordre et l'on arrive aux théorèmes suivants :

Parmi tous les cercles présentant un rapprochement du quatrième ordre avec un arc de courbe ayant deux sommets voisins, se trouve le cercle de plus grand rapprochement du quatrième ordre lorsque les deux sommets sont aux $\frac{35}{100}$ de la longueur de l'arc, comptée à partir du milieu et de part et d'autre de ce milieu.

Le cercle de plus grand rapprochement du quatrième ordre passe par le milieu de l'arc considéré, et son centre s'obtient en menant la médiane du triangle formé par les centres de courbure au milieu de l'arc et aux sommets, cette médiane étant issue du centre de courbure au milieu de l'arc et prolongée en sens inverse de sa direction des $\frac{4}{3}$ de sa longueur.

13. Sur les systèmes articulés.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 22 juillet 1878.

La question traitée dans ce Travail est la suivante :

Trouver dans un système articulé à trois tiges le point d'insertion de la dernière tige de telle sorte que l'on fasse ainsi décrire à un point donné, lié invariablement à la tige intermédiaire, une courbe donnée avec le maximum d'approximation.

Je montre que ce problème revient à trouver quels sont les points d'une figure mobile dont les trajectoires se rapprochent le plus d'un cercle dans une étendue donnée, et je suis ainsi amené à chercher le lieu des points qui, dans le déplacement quelconque d'une figure plane, sont, à un instant donné, à un sommet de leur trajectoire. Ce lieu, qui est une courbe du troi-

sième degré, ainsi que l'a démontré M. Mannheim [1], jouit de certaines propriétés remarquables que j'établis et qui permettent de le construire graphiquement. C'est une focale à nœud de Quételet dont le point double est au centre instantané de rotation, qui admet pour tangentes en ce point double la tangente à la circonférence des inflexions et sa perpendiculaire, et qui a pour direction asymptotique la droite menée par le centre instantané de rotation de telle sorte que la distance du centre des accélérations à cette droite soit égale au triple de la distance du centre des suraccélérations à cette même droite.

J'indique diverses formes de l'équation de cette courbe qui en facilitent beaucoup le tracé.

Ces théorèmes, en fournissant une construction facile de la focale, conduisent à une solution immédiate du problème le plus général des systèmes articulés à trois tiges. Il suffit, en effet, d'après les résultats établis dans le Mémoire précédent, de déterminer le point d'articulation cherché par cette condition que sa trajectoire ait deux sommets aux $\frac{35}{100}$ de sa longueur, comptés à partir du milieu. Si donc l'on construit les deux focales relatives à ces deux instants du mouvement, le point d'intersection réel qu'elles présentent toujours sera le point d'articulation et l'on pourra déterminer alors le centre et le rayon de ce cercle, c'est-à-dire la longueur de la bielle et le point de suspension, à l'aide des règles données dans le Travail sur le rapprochement des arcs de courbes.

On a ainsi un procédé permettant de traiter dans toute sa généralité la question posée, et donnant à la fois le point de suspension de la bielle, sa longueur et son point d'articulation sur la dernière tige, sans aucun calcul et par une construction graphique facile à exécuter. L'épure se simplifie d'ailleurs très notablement dans la plupart des cas qui se présentent dans la pratique. Lorsque la courbe à décrire est une ligne droite, on retrouve le perfectionnement du parallélogramme de Watt indiqué par M. Tchebychef [2]; lorsqu'elle est constituée par une parabole, comme dans le cas du régulateur Farcot, on est conduit à un régulateur à bras croisés, identique comme construction à celui de Farcot, mais fournissant un degré d'isochronisme beaucoup plus approché.

---

(1) Mannheim, *Comptes rendus*, 3 et 10 mars 1873.
(2) Tchebychef, *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IV, p. 433.

14. Sur un procédé permettant d'obtenir d'un régulateur à boules quelconque le degré d'isochronisme qu'on veut, et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. Théorie générale.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 25 août 1879.

Le problème de l'isochronisme du régulateur, c'est-à-dire la recherche d'un système qui reste en équilibre dans toutes ses positions pour une même vitesse, a préoccupé la plupart des mécaniciens qui ont cherché à mettre la vitesse des machines à l'abri des variations produites par les inégalités du travail résistant. Il a ainsi donné lieu à de nombreux et importants travaux. Une solution théorique complète a été indiquée, en particulier, par M. Rolland (¹) dans son Mémoire sur les régulateurs à boules conjuguées.

La question de l'isochronisme du régulateur est donc résolue; aussi ne me suis-je pas proposé de la reprendre à nouveau et de déterminer un régulateur isochrone. Le point de vue auquel je me suis placé est tout différent, et l'on comprendra à la fois le but de ce Travail et son utilité pratique par les remarques suivantes :

Tout d'abord la plupart des régulateurs employés dans l'industrie n'appartiennent pas aux types permettant de réaliser approximativement l'isochronisme et s'en écartent même très notablement. Il y a donc intérêt, à ce point de vue, à imaginer un procédé simple, peu coûteux, qui, sans les compliquer d'une manière sensible, améliore leur fonctionnement.

En second lieu, l'isochronisme parfait est, comme on sait, d'une application défectueuse, car il entraîne des oscillations de la vitesse, oscillations dont les amplitudes peuvent croître indéfiniment avec le temps et qui, dans tous les cas, ne cessent jamais. De ce fait résulte, d'une façon générale, la nécessité de s'approcher de l'isochronisme parfait sans l'atteindre et, dans chaque cas particulier, l'utilité d'un mécanisme qui, fournissant le degré d'isochronisme qu'on veut, permette de mettre ce degré d'isochronisme en rapport avec l'énergie du volant et les conditions de marche de la machine.

Enfin, comme il est indispensable dans certaines industries de faire varier la vitesse de régime, il y a un avantage évident, pour ces cas spéciaux, à trouver une combinaison qui permette de modifier cette vitesse, tout en conservant le degré d'isochronisme obtenu.

(¹) Rolland, *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIIᵉ Cahier.

Le système que j'indique dans le présent Mémoire et dans le suivant répond à ces divers *desiderata* et satisfait aux conditions énumérées ci-après :

1° Il s'applique à un régulateur à force centrifuge *quelconque ;*

2° Il procure le degré d'isochronisme qu'on veut ;

3° Il donne la possibilité de faire varier la vitesse de régime, sans même arrêter la machine ;

4° Il permet de maintenir ou de modifier à volonté le degré d'isochronisme, lorsque les conditions de marche viennent à changer ;

5° Il est simple à établir et ne complique pas sensiblement le mécanisme.

Le présent Travail contient la théorie générale par laquelle j'établis que le problème posé est résoluble à l'aide d'un seul contre-poids, convenablement placé et relié invariablement au levier de manœuvre.

Je démontre que ce contre-poids peut être donné *a priori* et je détermine la loi suivant laquelle il doit se déplacer, d'une part pour que le degré d'isochronisme reste le même quand la vitesse de régime varie, d'autre part pour que cette vitesse se maintienne constante quand le degré d'isochronisme est modifié. J'obtiens, dans le premier cas, une droite fixe par rapport au levier de manœuvre ; dans le second, une droite toujours parallèle à elle-même pour les différentes vitesses de régime.

15. Sur un procédé permettant d'obtenir d'un régulateur à boules quelconque le degré d'isochronisme qu'on veut et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime. Règles pratiques.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1er septembre 1879.

Ce Travail contient les règles pratiques auxquelles conduisent les équations fournies par la théorie générale exposée dans le Mémoire précédent ; je montre qu'il suffit, pour réaliser les diverses conditions posées, de munir le régulateur d'un contre-poids agissant sur le levier de manœuvre et susceptible de se déplacer le long d'une droite, mobile elle-même autour d'un certain point fixe par rapport à ce levier.

Ce point, qu'une construction graphique très simple permet de déterminer, peut d'ailleurs être fixé expérimentalement, car il n'est autre que celui où il faudrait placer le contre-poids choisi pour maintenir en équilibre le régulateur, supposé au repos, dans les deux positions qu'il occupe

lorsque le manchon est aux $\frac{7}{10}$ de sa course comptée à partir du milieu.

Lorsque le régulateur est isoscèle, le point fixe dont il s'agit est sur le prolongement du levier de manœuvre et une seule expérience suffit pour le déterminer.

On est ainsi conduit à énoncer le théorème suivant :

Pour obtenir d'un régulateur quelconque à force centrifuge le degré d'isochronisme qu'on veut et pour permettre de faire varier la vitesse de régime, il suffit de relier à l'axe O du levier de manœuvre une tige OA, calée en O, portant en A une deuxième tige mobile autour d'une charnière A, parallèle à l'axe O et munie d'un contre-poids qui peut se déplacer le long de cette tige.

Le contre-poids est arbitraire, mais, une fois qu'on l'a choisi, le point A en résulte et l'on peut en déterminer la position par une construction graphique simple. Cette position s'obtient d'ailleurs expérimentalement, par deux pesées dans le cas général, par une seule si le régulateur est isoscèle.

En faisant tourner la tige mobile OA autour du point O, on modifie le degré d'isochronisme qui dépend uniquement de la direction de cette tige; en transportant le contre-poids le long de OA, on fait varier la vitesse de régime sans altérer le degré d'isochronisme.

Ce système a été consacré par la pratique; il fonctionne depuis plusieurs années à la poudrerie du Pont-de-Buis.

16. Méthode d'approximation graphique applicable à un grand nombre de questions de Mécanique pratique.

Journal de l'École Polytechnique, 46e cahier, 1879, p. 167.

Un des problèmes auxquels on est le plus fréquemment conduit en Cinématique appliquée est celui qui consiste à faire décrire à un point donné une courbe donnée. La solution naturelle, et qui à première vue semble la plus exacte, est de guider le point décrivant à l'aide de rainures ou de cames placées suivant la courbe à tracer. Mais ce procédé présente deux inconvénients : d'abord il donne lieu à des frottements considérables, c'est-à-dire à d'importantes pertes de force et à des usures rapides; ensuite il manque en pratique de précision, par suite de la difficulté d'exécution et du jeu nécessaire des pièces. Ces deux inconvénients, et le premier surtout, ont en fait une telle importance, que l'on n'a jamais pu employer les guides courbes quand la force à transmettre était considérable et que l'on a dû même, en

général, renoncer à l'usage de ces guides pour les petites forces. On trouve préférable, dans la plupart des cas, de substituer au tracé exact un tracé approché pouvant être décrit sans glissières, et l'on sacrifie de cette manière une précision qui semble devoir être absolue à la suppression des frottements.

Mais ces substitutions se font, en général, sans règles déterminées et un peu au hasard, si bien que la précision du tracé est très souvent sacrifiée dans une proportion très forte et sans aucune nécessité.

Il y a donc un intérêt pratique réel à indiquer, d'une part, la méthode à adopter pour obtenir dans chaque cas toute la précision compatible avec les exigences de la question et, d'autre part, le degré d'approximation sur lequel on peut compter. Cette méthode découle tout naturellement des études que j'ai faites précédemment sur la substitution d'arcs circulaires à des arcs de courbes quelconques et sur la théorie du rapprochement des arcs de courbe d'étendue finie.

J'indique la marche à suivre dans les différents cas qui peuvent se présenter et je m'attache principalement à ramener le problème à des constructions purement graphiques en raison des avantages que présentent ces sortes de solutions. Je complète, chemin faisant, cette indication par l'énoncé d'un certain nombre de propriétés géométriques de nature à simplifier les constructions.

17. Détermination de la figure de repos apparent d'une corde inextensible en mouvement dans l'espace; conditions nécessaires pour qu'elle se produise.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 10 novembre 1879.

M. Resal a démontré ([1]) que, dans le cas particulier des transmissions par câbles, la forme de chacun des brins, lorsque le mouvement permanent a pu se réaliser, est une chaînette dont le paramètre est indépendant de la vitesse. Je me suis proposé d'examiner le cas général et de déterminer la figure de repos apparent d'une corde en mouvement dans l'espace, sous l'action de forces quelconques, simplement indépendantes du temps.

J'établis d'abord les équations du mouvement permanent d'une corde inextensible et, ces équations obtenues, j'y exprime que les forces extérieures sont indépendantes du temps; écartant alors le cas irréalisable

---

([1]) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. III, p. 271.

en pratique du mouvement uniformément accéléré, je reconnais que la vitesse, évidemment la même en tous les points, est, de plus, indépendante du temps; que, d'autre part, la tension en chaque point variable d'un point à un autre est, elle aussi, indépendante du temps et j'arrive enfin au théorème suivant :

Lorsqu'une corde inextensible en mouvement dans l'espace sous l'action de forces indépendantes du temps conserve une figure permanente, la forme qu'elle prend est la même que la forme d'équilibre au repos sous l'action des mêmes forces et ne dépend pas, par suite, de la grandeur de la vitesse d'entraînement.

18. Nouvelle démonstration d'un théorème sur le mouvement permanent d'une corde dans l'espace.

Bulletin de la Société philomathique, 18 novembre 1879.

La démonstration que j'avais donnée dans le Travail précédent du théorème qui vient d'être énoncé sur le mouvement permanent d'une corde dans l'espace nécessitait un changement de variable qui pouvait être évité. J'avais dû, en raison des développements ultérieurs que je me proposais de donner à cette théorie pour l'étude des transmissions télédynamiques, adopter ce changement de variable. La petite Note que j'ai communiquée à la Société philomathique contient la démonstration directe du théorème.

19. Procédé graphique permettant de déterminer les flèches des deux brins d'un câble métallique, ainsi que les valeurs des deux tensions, de leur rapport et de leur différence.

Bulletin de la Société philomathique, 14 février 1880.

Ce Travail a pour but de faire connaître un procédé graphique très simple, susceptible d'être exécuté au besoin en croquis, et permettant, lorsqu'on se donne la flèche au repos et le rapport ou la différence des tensions, quantités connues d'ordinaire, de déterminer à la fois les deux flèches et les deux tensions, c'est-à-dire tous les éléments nécessaires pour étudier un projet de transmission, aux points de vue de la régularité du mouvement, de la résistance du câble et du travail transmis.

C'est là un calcul que l'on a fréquemment à faire dans la pratique et les formules ordinaires données dans ce but par les aide-mémoire sont d'un emploi peu commode.

J'établis tout d'abord la relation qui existe entre les flèches f_1 et f_2 des deux brins pendant le mouvement et la flèche commune au repos f_0. J'en déduis que la courbe des flèches, c'est-à-dire la courbe obtenue en prenant f_1 et f_2 pour abscisse et ordonnée d'un point, est une circonférence.

Je cherche ensuite la relation entre les tensions T_1 et T_2 des deux brins pendant le mouvement et la tension commune au repos T_0; je trouve ainsi que la courbe des tensions est une courbe unicursale du quatrième ordre que l'on peut construire immédiatement.

J'ai de cette manière deux courbes qui traduisent géométriquement les relations existantes entre les quantités f_0, f_1, f_2, T_0, T_1, T_2, $T_1 - T_2$, $\frac{T_1}{T_2}$ et qui constituent une sorte de Table à double entrée, laquelle peut être employée pour toutes les questions relatives à une installation de câble. Ce procédé est d'une grande simplicité et, dans la plupart des cas, on peut évaluer à vue toutes les quantités dont on a besoin.

20. Équations du mouvement le plus général d'un fil. Cas des petites oscillations.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 16 février 1880

Pour établir les équations dont il s'agit, je me place dans le cas le plus général, c'est-à-dire qu'au lieu d'étudier simplement les petits mouvements en supposant la corde primitivement au repos, écartée ensuite de sa position d'équilibre, j'examine les petites oscillations qu'elle peut présenter lorsqu'elle était tout d'abord animée d'un mouvement permanent de vitesse quelconque.

Les équations auxquelles on parvient dans ces conditions sont précisément les équations fondamentales de la théorie des transmissions par câbles métalliques, prise dans sa généralité.

Je résous la question en adoptant pour axes de coordonnées la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe de repos apparent. Les trois équations différentielles partielles auxquelles j'arrive représentent, je crois, la forme la plus simple à laquelle elles puissent être ramenées. Elles se réduisent à celles qu'avait obtenues M. Resal (1), lorsqu'on se place dans les conditions spéciales où il a envisagé le problème, c'est-à-dire lorsqu'on

(1) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 328, 397; *Équations des petits mouvements d'une chaînette.*

suppose que la seule force agissante est la pesanteur, que la corde est tout d'abord au repos, que le mouvement a lieu dans un plan, et que l'arc considéré ne comprend qu'un très petit nombre de degrés dans le voisinage du sommet.

Les équations dont il s'agit me conduisent à la conséquence énoncée ci-après, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème plus général :

Dans une courbe funiculaire primitivement plane et soumise seulement à l'action de la pesanteur, les oscillations perpendiculaires au plan de la courbe ne produisent pas de variations dans les tensions et, réciproquement, les variations de tension ne peuvent donner lieu directement à des oscillations latérales.

21. Sur le calcul approché des radicaux de la forme $\sqrt{x^2-y^2}$.

Bulletin de la Société mathématique de France, 1880.

La méthode indiquée par le général Poncelet pour remplacer, avec une approximation connue, le radical $\sqrt{x^2+y^2}$ par une fonction linéaire $\alpha x+\beta y$ est très fréquemment employée dans la pratique en raison des simplifications précieuses qu'elle apporte dans les calculs.

Poncelet a montré que sa méthode s'appliquait aux radicaux de la forme $\sqrt{x^2-y^2}$ aussi bien qu'aux radicaux $\sqrt{x^2+y^2}$; mais les formules auxquelles il est arrivé dans le second cas, tant pour la valeur des coefficients que pour celle de l'erreur commise, n'ont aucune analogie avec les premières, bien qu'*a priori* une relation étroite doive cependant exister entre elles; elles présentent en outre une complication qui en rend l'usage assez difficile.

Je montre que ces formules deviennent identiquement les mêmes pour les deux radicaux, à la seule condition de changer les lignes trigonométriques en lignes hyperboliques ou, si l'on veut, à la seule condition de remplacer dans le calcul la Table de logarithmes ordinaire par une Table de fonctions hyperboliques.

Ce résultat permet de réduire de moitié le nombre des formules à employer et de remplacer toute la théorie que l'on est obligé de faire à nouveau, pour le calcul approché du second radical, par une simple remarque après le calcul du premier.

22. Détermination des tensions moyennes développées aux extrémités d'une corde pesante oscillant autour d'une position de repos apparent.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 23 février 1880.

Ce Travail a pour objet la détermination des tensions développées aux extrémités d'une corde en fonction des déplacements de ses extrémités. Ce calcul est nécessaire pour établir une théorie complète des transmissions télédynamiques. Il ne suffit pas, en effet, pour le bon fonctionnement d'une pareille transmission, que le câble soit susceptible de résister aux tensions qui se produisent dans l'état statique, seule condition dont on tienne compte actuellement, mais il faut encore qu'il puisse assurer la transmission régulière du mouvement et ne devienne pas lui-même une cause de perturbation. En d'autres termes, il est indispensable d'étudier à la fois la question au point de vue de la résistance et à celui de la régularité.

C'est là une condition générale dont les constructeurs commencent à se rendre compte et à laquelle il faudrait toujours avoir égard, mais qui est malheureusement dans beaucoup de cas fort difficile à traiter.

Quoi qu'il en soit, quand il s'agit d'un lien flexible du genre des câbles télédynamiques, la manière dont le mouvement se transmet d'une poulie à l'autre dépend simplement des accroissements de tensions produits par les variations de vitesse des poulies, c'est-à-dire par le déplacement relatif des extrémités des deux brins.

Ceci indique à la fois le but et l'utilité du présent Mémoire.

Il est nécessaire d'ailleurs, pour la recherche des accroissements de tension dont il s'agit, de considérer le câble à l'état de mouvement, ce qui revient à partir des équations générales que j'ai données dans un Mémoire précédent.

Ces équations sont au nombre de cinq; or, comme les oscillations latérales n'ont pas d'influence sur la tension (*voir* n° 20), on peut laisser l'une d'elles de côté et l'on est ramené ainsi à quatre équations. Mais, malgré cette réduction et la forme relativement simple des équations, l'intégration directe serait à peu près impossible et conduirait, même si l'on se bornait à une simple approximation, à des calculs inextricables.

On peut néanmoins obtenir une expression suffisamment approchée de la quantité à calculer, et l'on y arrive par un procédé particulier que j'ai fait connaître et qui est susceptible d'être appliqué dans un assez grand nombre de cas.

Ce procédé consiste en principe à tirer, des équations différentielles elles-mêmes, les valeurs moyennes de l'inconnue et de ses dérivées successives dans le champ de variation que l'on a à considérer.

Les quadratures que l'on effectue ainsi pour obtenir les valeurs moyennes en question ont pour effet d'éliminer les parties périodiques qui compliquent généralement l'expression des inconnues et en masquent les parties principales; elles conduisent à des expressions relativement simples et où ne figurent plus que les quantités dont on a besoin.

Dans le cas particulier qui fait l'objet de ce Travail, la tension inconnue n'entre que dans deux des équations et l'on obtient immédiatement sa valeur moyenne et celle de sa dérivée.

J'emploie alors pour trouver l'accroissement de tension un mode particulier de développement d'une fonction à l'aide des valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives, développement que j'ai établi dans un Mémoire subséquent (n° 27). Cette formule, limitée à ses deux premiers termes, me donne avec toute l'approximation voulue l'expression des variations de tension moyenne aux deux extrémités en fonction des déplacements de ces extrémités.

23. Sur un perfectionnement applicable à tous les régulateurs à force centrifuge.

Journal de l'École Polytechnique, 47e cahier, 1880.

Ce Travail n'est au fond que le développement de la théorie dont j'avais exposé les principes dans deux Notes précédentes, insérées aux *Comptes rendus* (nos 14 et 15), et que j'ai reprise en donnant tous les détails qu'elle comporte de manière à la constituer en corps de doctrine. Je l'ai complétée d'ailleurs sur divers points assez nombreux et je l'ai fait suivre de l'examen détaillé du cas relatif au régulateur isoscèle.

Ce cas particulier, qui est le plus fréquemment employé dans la pratique, méritait, à ce titre, une étude spéciale. J'indique l'épure à faire pour lui appliquer le perfectionnement indiqué et j'arrive ainsi à un dispositif, très simple à exécuter, n'exigeant qu'une complication de mécanisme insignifiante et qui résout complètement, au point de vue pratique, la question de l'isochronisme.

Lorsqu'on se donne les éléments du régulateur employé, quel que soit d'ailleurs son système, pourvu qu'il soit à force centrifuge; lorsqu'on connaît d'autre part, la course du manchon et la vitesse de régime qui corres-

pond à la position horizontale du levier de manœuvre, il suffit d'une seule expérience pour déterminer les dimensions du dispositif de perfectionnement; la grandeur du contre-poids peut être choisie arbitrairement et c'est là un des avantages du procédé qui s'applique d'ailleurs à tout régulateur existant sans exiger aucune modification dans ce régulateur.

Dans le cours de ce Travail, j'indique une construction très simple, qui permet de ramener à une seule toutes les formules relatives aux divers systèmes de régulateur à force centrifuge.

24. Recherche du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par câbles.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 8 mars 1880.

Je me suis proposé de rechercher comment un câble, s'enroulant sur deux poulies, transmet le mouvement de l'une à l'autre dans le cas général d'une puissance et d'une résistance variables.

Pour résoudre cette question, il suffit de se reporter aux résultats obtenus dans un Travail précédent (nº 22), et de s'appuyer sur la relation qui existe entre les efforts qu'exerce un câble à ses deux extrémités et le déplacement relatif qu'elles peuvent éprouver.

Il est clair, en effet, que si cette relation est telle qu'un faible écartement relatif des extrémités du câble détermine un grand accroissement de tension, les variations de la résistance n'entraîneront qu'une différence très faible de vitesse pour les deux poulies, de sorte que, l'uniformité du mouvement en étant à peine altérée, la transmission, prise au point de vue cinématique, sera presque parfaite. Seulement il se produira dans le mécanisme, à chaque perturbation, des efforts violents qui pourront en fatiguer les diverses parties.

On voit donc que le rapport de l'accroissement de tension au déplacement relatif des extrémités joue un rôle capital, qu'il doit être maintenu entre certaines limites et qu'il peut être pris comme le *coefficient de régularité* de la transmission.

Les limites entre lesquelles ce coefficient doit rester compris sont fixées dans chaque cas par la double condition de maintenir dans les limites voulues, d'une part, les variations de la vitesse du mécanisme et, d'autre part, les accélérations passagères des diverses parties de ce mécanisme et les vitesses de changement des tensions.

Je montre que le coefficient de régularité a pour expression

$$\frac{3}{16}pl^2\left(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}\right),$$

où p est le poids du câble par mètre courant, l la demi-portée, f_1 et f_2 les deux flèches pendant le mouvement.

En adoptant cette valeur, toutes les conclusions relatives à la régularité du mouvement dans les transmissions par courroies s'appliquent aux transmissions par câbles.

25. Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane.

Journal de Mathématiques pures et appliquées de M. Liouville, dirigé par M. Resal, 1880.

Les équations du mouvement d'une courbe funiculaire plane ont été établies par M. Resal, qui a obtenu la forme la plus simple à laquelle puissent se ramener les trois équations aux différences partielles, simultanées, qui résolvent le problème. Après avoir donné ces équations, M. Resal, dans son *Traité de Mécanique générale* (¹), les a appliquées au cas du mouvement lent d'une corde dont un point est fixe.

Cette partie de la démonstration donne lieu à une difficulté qui m'a paru réelle et qui provient de ce que M. Resal, n'ayant voulu traiter que le cas où la corde est très voisine de la ligne droite, ce qui résulte de son raisonnement même, n'a pas indiqué explicitement cette restriction. Et comme la question du mouvement des courbes funiculaires est d'une sérieuse importance, tant par les difficultés mathématiques qu'elle présente que par les applications dont elle est susceptible; comme, d'un autre côté, le Travail de M. Resal est devenu classique, il était utile de signaler cette difficulté et de la résoudre.

Je montre que l'équation finale à laquelle arrive M. Resal est non seulement exacte, malgré l'objection à laquelle donne lieu la démonstration, mais encore qu'elle ne suppose en rien l'hypothèse restrictive de la fixation des extrémités. J'établis ainsi ce fait remarquable que cette équation finale est rigoureuse, alors que l'équation dont elle dérive immédiatement n'est pas admissible dans le cas général. Il y a là un point de doctrine intéressant

(¹) T. I, p. 321.

que je parviens à élucider en prouvant que les deux inconnues principales du problème ne sont pas du même ordre de grandeur, si bien que la première, étant négligeable par rapport à l'autre, disparaît des équations qui donnent cette autre et que l'on est ainsi tenté d'admettre qu'elle est toujours nulle. On conçoit alors qu'en supposant, dès le début, cette inconnue égale à zéro, ce qui n'est vrai que lorsque la corde s'écarte très peu de la ligne droite, on obtient des formules qui sembleraient *a priori* n'être applicables qu'à ce cas particulier et qui cependant se trouvent conduire à des résultats justes dans le cas général, par suite du fait singulier signalé plus haut.

Je termine le Mémoire en établissant les équations du mouvement d'une courbe funiculaire assujettie à rester plane par une méthode basée sur la considération des mouvements relatifs. Cette méthode a l'avantage de fournir une signification claire des différents termes qui composent les équations.

26. Règles pratiques pour l'établissement des transmissions télédynamiques.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 15 mars 1880.

Les formules que j'ai établies dans une précédente Communication relative à la régularité du mouvement dans une transmission télédynamique (n° 24) ont montré quelle était, à ce point de vue, l'importance de la considération des flèches. S'il y a intérêt, pour augmenter cette régularité, à diminuer les flèches, il importe cependant de ne pas les réduire outre mesure, d'une part afin d'éviter que, la régularité étant trop grande, les variations du travail résistant ne donnent lieu à des secousses trop violentes et, d'autre part, afin que, sous l'influence des raccourcissements accidentels que peut subir le câble, il ne se produise pas des efforts dangereux pour le mécanisme.

La discussion de l'expression adoptée pour le coefficient de régularité conduit à cette loi que, toutes choses égales d'ailleurs, la flèche relative au repos, c'est-à-dire le quotient de la flèche au repos par la portée, doit être prise d'autant plus grande que la distance des poulies extrêmes est plus petite, et varier sensiblement en raison inverse de la racine carrée de cette distance.

Dans tous les cas, la première chose à se fixer pour le calcul d'une transmission par câbles est la valeur de cette flèche relative. Elle peut atteindre $\frac{1}{15}$ pour les petites distances de 20^m à 30^m, mais elle ne doit jamais, à moins de circonstances particulières, descendre au-dessous de $\frac{1}{40}$, sous peine de

rendre possible la production d'efforts dangereux sous l'influence des variations de température et d'humidité.

Ceci posé, je détermine successivement, en partant de la valeur des flèches dont la théorie générale a montré l'importance, le poids du câble par mètre courant, la section en fer qu'il doit avoir, le nombre de fils qui doivent le composer, le diamètre de ces fils, la tension dans le brin conducteur, la tension d'incurvation, etc., en un mot tous les éléments que l'on peut avoir à considérer.

J'arrive ainsi à des formules simples, à des règles essentiellement pratiques qui diffèrent des résultats empiriques que l'on possédait seuls jusqu'ici, en ce sens qu'elles tiennent compte à la fois des conditions de résistance ainsi que des conditions de régularité et de durée, tandis que jusqu'alors ces dernières avaient été complètement laissées de côté.

27. Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 14 juin 1880, Journal de Mathématiques pures et appliquées de M. Liouville, dirigé par M. Resal, 3e série, tome VII, juin 1881, page 185.

Les problèmes ordinaires de Mécanique appliquée se ramènent à la détermination d'une fonction assujettie à certaines conditions et il suffit, dans la plupart des cas, de déterminer cette fonction dans un certain intervalle que fixent les conditions mêmes du mécanisme étudié.

D'autre part, les équations que l'on obtient dans cette science, n'étant jamais qu'approximatives, ne peuvent, en général, être différentiées. Il est permis, au contraire, de les intégrer sans s'écarter de l'ordre d'approximation qu'elles comportent.

Il suit de là que les formules approchées dont on dispose en Mécanique appliquée sont surtout propres à fournir les valeurs moyennes des quantités qui y figurent, puisque ces valeurs moyennes s'obtiennent par des intégrations.

Ces deux considérations montrent qu'il y a intérêt, au point de vue des applications, à substituer au développement de Maclaurin, où entrent les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives en un point déterminé, un autre développement procédant suivant les valeurs moyennes de la fonction et de ses dérivées dans l'intervalle que l'on considère.

C'est la recherche de ce développement qui constitue le présent Travail. Je résous d'abord la question suivante :

Trouver le polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses n dérivées, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, soient égales à $n+1$ quantités données $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Je montre que ce polynôme peut se mettre sous la forme

$$y = P_0\gamma_0 + P_1\gamma_1 + \ldots + P_n\gamma_n$$

$P_0, P_1, \ldots, P_n$, étant des polynômes en x et h, de degré égal à leur indice et indépendants des valeurs de $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Ces polynômes, que je désigne sous le nom de *polynômes auxiliaires*, jouissent des propriétés ci-après :

1° Chacun d'eux est indépendant du degré du polynôme y que l'on veut former et ne dépend que de son degré à lui-même, de telle sorte que tous ces polynômes forment une suite indéfinie parfaitement déterminée;

2° La valeur moyenne dans l'intervalle considéré d'un polynôme quelconque est égale à zéro, sauf pour le premier, dont la valeur moyenne est l'unité;

3° Chacun de ces polynômes auxiliaires est la dérivée du polynôme de degré immédiatement supérieur, ce qui les fait rentrer dans la classe des polynômes étudiés par M. Appell ([1]), au moment même où je faisais ce Travail.

Ces propriétés, qui suffisent à déterminer complètement les polynômes auxiliaires, me permettent de faire leur étude, de trouver la fonction génératrice de leurs coefficients, puis leur fonction génératrice à eux-mêmes. Je suis conduit ainsi au développement suivant :

$$y = \left(\operatorname{moy} y\right)_{-h}^{+h} + \frac{x}{1!}\left(\operatorname{moy}\frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + \frac{x^2 - \frac{h^2}{3}}{2!}\left(\operatorname{moy}\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} + \frac{x^3 - h^2x}{3!}\left(\operatorname{moy}\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{-h}^{+h} + \ldots$$

Ce développement qui, lorsque l'intervalle considéré diminue indéfiniment, devient celui de Maclaurin, a une signification géométrique facile à apercevoir lorsqu'on le limite à ses deux ou trois premiers termes; on voit en

---

([1]) APPELL, *Sur une classe de polynômes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, p. 119).

particulier que dans tous les cas la ligne substituée à la courbe réelle traverse cette dernière de manière à déterminer une surface équivalente et à avoir la même direction moyenne.

Il en résulte que les erreurs à craindre dans l'intervalle considéré sont, en général, moindres que si l'on avait fait usage de la formule de Maclaurin. Cette formule, en effet, qui donne une grande approximation dans les environs du point de départ, expose à des erreurs très sensibles dès que l'on s'éloigne de ce point particulier. Or, dans les questions de Mécanique pratique, c'est surtout la marche générale du phénomène qu'il importe de saisir plutôt que son expression exacte en un point donné. Aussi conviendra-t-il, dans la généralité des cas, d'employer de préférence le mode de développement qui vient d'être indiqué.

Le présent Travail a donné lieu à de très intéressantes recherches de M. Halphen (¹) qui a indiqué en particulier à quelle condition une fonction était développable suivant la série précédente et a donné la forme du reste.

28. Sur la transmission de mouvement par disque et galet.

Bulletin de la Société Philomathique, 23 octobre 1880.

Dans un certain nombre de mécanismes il est utile de pouvoir faire varier à volonté la vitesse angulaire d'un arbre tournant, sans changer celle de l'arbre qui le commande; l'un des systèmes employés pour atteindre ce résultat est celui du disque et galet.

L'arbre moteur porte un plateau circulaire qu'il entraîne dans son mouvement; contre ce plateau est appliqué un galet cylindrique, calé sur l'arbre de la machine et dont la génératrice de contact est dirigée suivant le rayon du disque.

Par suite du frottement, le disque tournant entraîne le galet ou inversement; le mouvement de rotation de l'arbre moteur est ainsi transformé en une rotation de l'arbre de la machine, et le rapport des vitesses angulaires de ces deux arbres perpendiculaires peut être facilement modifié en écartant ou en rapprochant le galet du centre du disque.

Si l'on considère le galet lorsqu'il est en mouvement uniforme, on voit

(¹) Halphen, *Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. V, 1881, p. 462; *Comptes rendus*, 14 nov., 21 nov., 12 décembre 1881).

que dans sa partie interne voisine du centre du disque, il glisse dans le sens du mouvement de ce disque, tandis que dans sa partie externe il glisse en sens contraire. Ces deux portions sont séparées par une circonférence qui roule sans glisser et autour du point de contact de laquelle il se produit, à chaque instant, un pivotement.

La détermination de cette circonférence de roulement est utile dans les applications [1], car c'est elle qui fournit le rapport des vitesses angulaires des deux arbres. J'indique deux méthodes différentes pour l'obtenir, l'une qui résulte de l'équation d'équilibre des forces agissant sur le galet, l'autre qui est la conséquence du principe suivant que j'admets :

Lorsque le mouvement d'un système n'est pas complètement défini par les liaisons auxquelles il est assujetti, le mouvement réel qu'il prend, une fois l'état de régime établi, est celui dans lequel le travail des forces résistantes est minimum.

Je discute le résultat obtenu et en déduis les conséquences pratiques qu'il comporte. Puis j'indique le principe d'un nouvel appareil, dans lequel il sera possible aisément de faire varier la nature des corps en contact, la pression du galet sur le disque, la position, la hauteur et le rayon de ce galet, la valeur de la résistance à vaincre. On pourra ainsi faire une étude complète des mécanismes à disque et galet, fixer les limites de forces que l'on peut transmettre avec les diverses matières et savoir, de la sorte, ce que l'on peut attendre de ce mode de transmission qui n'a pas été étudié jusqu'ici.

29. Frottement d'une corde sur un cylindre quand tous deux tournent avec une grande vitesse.

Bulletin de la Société mathématique de France, 3 décembre 1880.

Lorsqu'une corde enroulée suivant la section droite d'un cylindre fixe est sur le point de glisser, la relation qui lie la puissance Θ_1 à la résistance Θ_2 est, comme on sait, $\Theta_1 = \Theta_2 e^{f\alpha}$, f étant le coefficient de frottement au départ de la matière de la corde et de celle du cylindre, α l'angle des deux normales aux extrémités de l'arc embrassé.

---

[1] C'est à propos de l'installation dans une Manufacture d'un torréfacteur de M. Rolland que j'ai eu à résoudre cette question. La transmission de mouvement à vitesse variable a lieu, en effet, dans cet appareil, par disque et galet.

Quoique cette formule ne soit théoriquement applicable que lorsque le cylindre est fixe, on l'étend d'ordinaire au cas où il est animé d'une rotation autour de son axe, ce qui se présente pour les poulies de transmission par lien flexible. Cette manière de procéder, admissible lorsque la vitesse du lien est faible, ne peut plus être acceptée dans les transmissions à grande vitesse très répandues aujourd'hui. On arrive souvent, en effet, à des vitesses de 30^m par seconde; les forces d'inertie ne sont plus négligeables et le rapport des tensions peut être inférieur à $e^{f\alpha}$ sans que l'adhérence soit assurée.

Cette remarque explique certains mécomptes qui se produisent dans la pratique; elle montre que, pour les cas dont nous venons de parler, il est indispensable de tenir compte de la force centrifuge dans l'évaluation de la limite supérieure à fixer pour le rapport des tensions; elle explique ainsi l'intérêt pratique que peut offrir le présent Travail.

Je démontre qu'en désignant par V la vitesse du lien, par Δ sa densité moyenne et par g l'accélération de la pesanteur, on a, lorsque le glissement est sur le point de se produire

$$\frac{\Theta_1 - \frac{V^2\Delta}{1000g}}{\Theta_2 - \frac{V^2\Delta}{1000g}} = e^{f\alpha}.$$

Je discute complètement cette formule et en tire toutes les conséquences pratiques qu'elle comporte. Pour faciliter d'ailleurs les applications, je donne le Tableau numérique des valeurs de $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ auxquelles elle conduit dans les cas ordinaires qui peuvent se présenter.

30. Théorie générale des transmissions par câbles métalliques; règles pratiques.

Extrait aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 25 avril 1881; Mémoire *in extenso*, Journal de l'École Polytechnique, cahier 1881.

Le volume que j'ai publié sur la théorie des transmissions télédynamiques est le développement, exposé sous forme didactique, des diverses recherches que j'avais faites précédemment sur ce sujet. Il a été l'objet d'un Rapport de M. Resal à la suite duquel l'Académie en a voté l'insertion au *Recueil des savants étrangers*. Voici quelques extraits de ce Rapport :

« Les formules admises pour les courroies ne sont pas applicables aux

câbles, et celles que l'on a cherché à leur substituer sont insuffisantes, en ce sens qu'elles laissent subsister une indétermination que la solution du problème ne comporte pas. A la vérité, cette indétermination ne disparaît, pour les courroies, que parce que l'on fait intervenir une hypothèse, due à Poncelet, basée sur ce que la tension peut être considérée comme constante dans chacun des brins. Mais ce n'est pas là le cas des câbles télédynamiques, où la pesanteur et l'inertie jouent un rôle très important.

» L'insuffisance des théories actuelles tient à ce que l'on néglige, en vue d'éviter de grandes difficultés analytiques : 1° l'inertie du câble; 2° l'allongement permanent qu'il subit par l'usage; 3° les variations dans sa longueur dues à l'influence de l'humidité et des changements de température, variations qui peuvent atteindre une importance très notable; 4° les variations de l'effort transmis, causes principales des irrégularités dans le fonctionnement de la transmission.

» M. Léauté, en tenant compte de tous ces éléments, a traité complètement la question des transmissions télédynamiques dans le Mémoire qu'il a présenté à l'Académie (séance du 25 avril 1881), et qui fait l'objet de ce Rapport.

. . . .

» Après avoir établi, sans restrictions et dans le cas le plus général, ses formules fondamentales, M. Léauté étudie d'une manière spéciale le cas d'une corde uniquement soumise à l'action de la pesanteur, c'est-à-dire celui des transmissions télédynamiques. Il se propose de déterminer le rapport qui existe entre l'accroissement de tension produit par un déplacement relatif des extrémités du câble et ce déplacement, rapport auquel il a donné le nom de *coefficient de régularité*.

» C'est là, en effet, l'élément principal à considérer au point de vue du fonctionnement de la transmission, car c'est de la grandeur de ce rapport que dépend la manière dont le câble, et par suite la transmission tout entière, se comportent sous l'action des irrégularités du travail résistant. Mais la solution présente une difficulté considérable, que l'auteur est parvenu à surmonter par un artifice spécial sur lequel il est utile d'insister, le procédé employé pouvant s'appliquer à d'autres questions de la Mécanique appliquée.

» La méthode ordinaire conduirait à des intégrations très difficiles, et à un résultat compliqué de termes périodiques que l'on n'a pas à considérer, puisque, dans l'expression cherchée de la tension, la seule partie utile est la partie moyenne. Les calculs seraient d'ailleurs d'autant plus pénibles que les

premiers termes qui apparaissent par ordre de grandeur sont précisément ceux qui n'influent pas directement sur la tension cherchée.

» M. Léauté a tourné la difficulté en déduisant directement des équations différentielles elles-mêmes la valeur moyenne de la tension, et il est arrivé au résultat final en faisant l'application d'une formule qui lui est due et qu'il a fait connaître dans la séance du 14 juin 1880. Cette formule donne le développement, dans un intervalle donné, d'une fonction à une seule variable, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. Elle est susceptible d'un grand nombre d'applications.

» M. Léauté arrive ainsi à fixer la valeur de ce qu'il appelle le *coefficient de fonctionnement*, c'est-à-dire celle du rapport entre le coefficient de régularité et l'effort transmis. C'est là le point le plus important de son Travail, car il est possible alors d'installer une transmission quelconque de telle sorte qu'elle fonctionne de la même manière qu'une transmission donnée, quels que soient d'ailleurs la portée, l'effort à transmettre et les irrégularités du travail résistant.

» C'est pour avoir négligé la considération du coefficient de fonctionnement, qui conduit à la notion de l'*équivalence* de deux transmissions, que les formules actuellement admises comportent l'indétermination dont nous avons parlé au début et donnent lieu à de si nombreuses déceptions.

» Borné à ce point, le Travail de M. Léauté pourrait déjà être considéré comme complet.

» Mais l'auteur ne s'en est pas tenu là; il examine de nouveau, au point de vue des applications, tous les éléments de la question, et, pour faire la part des exigences de la pratique, il introduit des additions et des simplifications.

. . . .

» Le Mémoire de M. Léauté renferme un grand nombre de Tableaux numériques destinés à éviter aux ingénieurs, chargés d'établir des transmissions télédynamiques, les calculs qu'exige la théorie; il se termine par l'étude des transmissions par câbles successifs et celle des câbles avec galets de support.

» En résumé, le Travail de M. Léauté contient l'étude rationnelle de la question, si importante des transmissions télédynamiques; la solution est complète tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique; aussi la Commission propose à l'Académie l'insertion de ce Mémoire au *Recueil des Savants étrangers* ».

31. Appendice aux Éléments de Construction de Machines de M. W. Cauthorne Unwin.

Paris, Gauthier-Villars, 1882.

Les *Éléments de Construction de Machines* ou *Introduction aux principes qui régissent les dispositions et les proportions des organes des machines*, par M. W. Cauthorne Unwin, professeur de Mécanique au Collège royal indien des ingénieurs civils, sont un des livres les plus répandus dans les ateliers anglais. Il a été traduit sur la seconde édition par M. Bocquet, ancien élève de l'École Centrale, et j'ai rédigé pour cette traduction française un Appendice divisé en trois Parties : 1° sur les transmissions par câbles; 2° sur le tracé des engrenages; 3° sur les régulateurs.

Cet Appendice, qui contient l'exposé sommaire des résultats auxquels m'ont conduit mes études sur ces divers sujets, est fait à un point de vue exclusivement pratique et s'adresse spécialement aux constructeurs de machines.

32. Sur l'application de la résistance des matériaux au calcul des pièces de machines.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 27 mars 1882. — Journal de l'École Polytechnique, LIIe cahier, p. 201; 1883.

Les formules ordinaires de la résistance des matériaux ne sont pas toujours applicables au calcul des pièces de machines qui se trouvent, au point de vue de la forme, des liaisons et des déformations, dans des conditions particulièrement complexes.

Ces formules supposent, en effet, généralement, que les composantes et les moments des forces extérieures peuvent être évalués comme s'il n'y avait pas eu de déformations.

Cette hypothèse, qui présente le grand avantage de ramener le problème à de simples quadratures, est admissible pour les pièces employées dans les constructions civiles où les efforts extérieurs, principalement dus à la pesanteur et aux réactions des points d'appui, n'éprouvent que de faibles variations par suite des déformations élastiques.

Il n'en est plus de même pour les pièces de machines et cela pour deux raisons :

En premier lieu, les actions principales proviennent souvent d'efforts élastiques exercés par les pièces en relation avec celle que l'on considère, de telle sorte que ces actions dépendent alors essentiellement des déformations qu'éprouvent ces pièces. Ces déformations elles-mêmes dépendent, par suite des liaisons, de la déformation de même ordre qu'éprouve la pièce étudiée, et les forces extérieures auxquelles cette pièce est soumise se trouvent ainsi fonction de la déformation inconnue qu'elle subit. Il n'est évidemment plus possible alors, dans l'évaluation des efforts subis, de la considérer comme restant à l'état naturel.

D'autre part, les formes et les liaisons que l'on rencontre dans les mécanismes sont d'ordinaire compliquées, ce qui oblige, quand on veut calculer rigoureusement un organe de machine, à étudier séparément les éléments qui le composent et entraîne ainsi à tenir compte, pour chacun de ces éléments, des forces élastiques qu'exercent sur lui les éléments qui y sont reliés.

Le problème, dans ces conditions, change de nature. En effet, dans l'hypothèse ordinaire, les forces extérieures que l'on doit considérer en chaque point sont fonctions seulement de l'unique variable qui définit la position de ce point et l'on est ainsi conduit à de simples quadratures. Dans le cas que j'étudie, au contraire, les forces qui interviennent dépendent non seulement de la position du point, mais encore de la déformation en ce point; les équations contiennent à la fois les éléments de la déformation et leurs dérivées; les quadratures sont remplacées par des équations différentielles.

Ce sont les équations générales, correspondant à ce cas important pour la théorie des machines, que je me suis proposé d'établir, en me bornant toutefois, pour plus de simplicité, aux pièces planes qui sont susceptibles de se décomposer en poutres à section constante, les seules employées habituellement.

La même méthode s'appliquerait d'ailleurs aux pièces quelconques à double courbure.

Je termine le Mémoire en examinant spécialement le cas très fréquent où les déformations produites directement par l'extension et le glissement sont très faibles vis-à-vis de celles dues à la flexion, c'est-à-dire où l'on peut regarder la pièce comme inextensible et les sections normales comme restant normales à la fibre neutre déformée, à la condition toutefois de conserver les efforts élastiques longitudinaux et transversaux, qui ne sont pas négligeables alors même que leurs effets le sont.

33. Sur la régularisation du mouvement d'une usine à poudre.

Génie civil, t. II, n° 14, 15 mai 1882.

Le but de cette Note est la description d'un appareil établi suivant les principes que j'ai exposés dans des Mémoires précédents au sujet de la régularisation du mouvement des machines. Les circonstances spéciales qui se présentaient dans le cas actuel étaient bien propres d'ailleurs à montrer les diverses applications du système que j'avais indiqué.

Il s'agissait d'une usine lissoir pour poudre de guerre à trois tonnes, commandée par une turbine. Ces tonnes devaient pouvoir marcher, suivant les phases du travail, à des vitesses variant depuis six tours jusqu'à quatorze tours par minute. D'autre part, elles devaient pouvoir aussi fonctionner simultanément ou séparément, ce qui correspondait, pour la force utilisée, à une variation du simple au triple. Enfin, il importait, aussi bien pour la sécurité que pour la perfection du travail, de donner à chaque instant à la vitesse de la machine toute la régularité que comporte le lissage de la poudre.

Dans ces conditions, il était impossible de régler la marche de l'usine avec un régulateur ordinaire, car il était nécessaire non seulement de faire varier à volonté la vitesse de régime, mais encore de régler le degré d'isochronisme d'après le nombre des tonnes embrayées, le régulateur établi pour la marche à trois tonnes pouvant produire des oscillations indéfinies de la vitesse dès qu'on réduisait le nombre des tonnes. Par l'emploi du dispositif simple que j'ai fait connaître, les divers *desiderata* qui viennent d'être énumérés ont pu être réalisés et l'appareil fonctionne à la Poudrerie nationale du Pont-de-Buis, d'une façon satisfaisante, depuis qu'il y a été installé.

L'installation dont il s'agit fournit d'ailleurs un exemple d'une disposition particulière qui constitue un des avantages du système. Cette disposition consiste à séparer du régulateur proprement dit le mécanisme correcteur qui fixe la vitesse de régime et l'isochronisme. On peut ainsi placer ce mécanisme à portée de l'ouvrier et, dans le cas actuel, c'était une nécessité absolue, le régulateur occupant une position très difficilement accessible.

34. Sur les solides d'égale résistance.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 11 décembre 1882.

On sait que, dans le cas d'une pièce de largeur uniforme encastrée à l'une de ses extrémités et sollicitée par une force unique à l'autre extrémité, on obtient un solide d'égale résistance en prenant pour profil de la pièce une parabole dont le sommet est à l'extrémité libre.

Habituellement la plupart des constructeurs, dans le but de rendre l'exécution plus facile, donnent la forme parabolique à l'une des faces seulement, en faisant la seconde complètement plane. Ils pensent ainsi obtenir un solide d'égale résistance.

Mais, comme l'a fait remarquer M. Resal (1), cette conséquence est en désaccord avec l'un des principes fondamentaux de la résistance des matériaux, d'après lequel les seules sections invariables de forme sont les sections normales à la fibre neutre. M. Resal a donné, en outre, pour la première fois, l'équation exacte de la fibre neutre du solide d'égale résistance à face plane; toutefois, d'après la remarque même de l'auteur, cette équation est trop compliquée pour être utilisée.

Il restait donc à trouver la forme du profil extérieur lui-même, à mettre la solution sous une forme applicable et à en déduire les conséquences pratiques. C'est ce que j'ai fait dans cette Note. J'ai été ainsi conduit à un tracé particulièrement simple et d'une application immédiate.

35. Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 5 mars 1883.

Les courbes décrites par les divers points d'une bielle oscillante, dont la tête parcourt un cercle complet et le pied un arc de cercle, sont utilisées fréquemment dans les mécanismes; d'ordinaire, le cercle décrit par la tête est petit par rapport à la longueur de la bielle et par rapport au rayon de l'arc de cercle que trace le pied.

Cette double condition, par les simplifications qu'elle entraîne, est carac-

(1) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. V, § 40.

téristique du problème que j'ai traité; elle permet de déterminer les propriétés mécaniques de ces courbes utilisées dans la pratique.

Je démontre que, dans les circonstances indiquées, les trajectoires étudiées sont des courbes unicursales de quatrième ordre que l'on peut regarder comme engendrées par un point qui parcourt une ellipse, pendant que le centre de cette courbe décrit lui-même une autre ellipse. Les vitesses du point décrivant et du centre doivent d'ailleurs être réglées de façon que les aires décrites par les rayons vecteurs correspondants dans les deux ellipses soient dans un rapport constant et que le point décrivant fasse deux révolutions complètes pendant que le centre en fait une.

Ce théorème établi, je remarque que l'ellipse décrite par le centre est grande par rapport à l'ellipse mobile, que c'est elle qui influe le plus sur l'allure générale des trajectoires et que, lorsqu'elle se réduit à une portion de droite, ces trajectoires présentent la forme de lemniscates très aplaties, infléchies suivant une parabole.

C'est ce double fait de donner lieu à des trajectoires très aplaties dont la courbure générale peut varier, qui explique l'importance de ces courbes dans la pratique. On conçoit, en effet, qu'elles puissent être souvent substituées à des arcs ordinaires et que l'on évite ainsi des complications de mécanisme et des pertes de travail, en même temps que l'on supprime l'inconvénient des points morts.

36. Sur un perfectionnement applicable à la turbine Jonval.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 9 avril 1883.

La turbine Jonval présente deux ordres d'inconvénients : le premier consiste dans la difficulté qu'il y a, lorsque le travail résistant vient à varier, à maintenir un régime constant par l'emploi d'un régulateur; le second résulte de la diminution notable du rendement qui se produit dès qu'on abaisse le débit au-dessous de la dépense normale correspondant à l'ouverture complète des orifices.

Les constructeurs américains ont remédié au premier inconvénient par le vannage Bodine; quant au second, il n'est pas spécial à la turbine Jonval, il est celui de toutes les turbines noyées et l'on peut dire qu'il est dû aux mêmes causes.

Il tient d'une part à ce que le frottement de la turbine dans l'eau acquiert une importance relative plus grande quand le travail moteur diminue.

Il est dû d'autre part aux étranglements qui résultent de l'occlusion partielle des orifices et aux pertes de force vive produites par les changements de vitesse qui, dans la disposition actuelle de la turbine Jonval, sont la conséquence forcée de la diminution du débit. Tout vannage qui agira à la fois sur tous les orifices en faisant varier la dimension de chacun d'eux, comme le vannage Bodine, laissera subsister les causes de diminution de rendement qui viennent d'être exposées. La seule façon de les éviter et de mettre ainsi, à ce point de vue, la turbine Jonval sur le même rang que les autres, c'est d'employer, comme on l'a fait pour les turbines ordinaires, le *vannage partiel*, c'est-à-dire la fermeture complète d'un certain nombre d'orifices, ce qui, comme on le sait, constitue un réel perfectionnement.

Mais l'on sait aussi que ce perfectionnement exige, pour produire l'effet qu'on en peut attendre, que la turbine à laquelle on l'applique soit placée en dehors de l'eau.

C'est là ce que réalise pour la turbine Jonval la disposition que j'indique. Par ce procédé simple à établir et qui se règle automatiquement, la turbine, n'est plus noyée, les causes de diminution du rendement ont disparu, le vannage partiel peut être employé et l'on n'a sacrifié qu'une portion de la hauteur de chute d'une importance relative très faible.

Ce système a été l'objet d'études spéciales faites en Italie par M. l'ingénieur Sinigaglia qui les a publiées dans le *Journal de l'Ingénieur* (1).

37. Règles pratiques pour la substitution à un arc donné de certaines courbes fermées engendrées par les points d'une bielle en mouvement. Cas général.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 7 mai 1883.

J'avais montré dans un Travail précédent (n° 35) que les trajectoires des points d'une bielle en mouvement sont susceptibles de fournir des courbes très aplaties que l'on peut infléchir suivant une courbe donnée; j'avais fait remarquer en outre quelle importance cela pouvait avoir dans les applications en permettant de faire décrire avec une approximation suffisante un arc déterminé à l'aide d'une simple bielle. Il restait à indiquer les règles pratiques propres à fixer, dans chaque cas particulier, le point décrivant et les dimensions des diverses pièces de façon à obtenir le maximum d'exactitude.

(1) Ing. Sinigaglia, *Idropneumatizzazione automatica Léauté della turbina Jonval* (*Giorn. dell' Ing. Arch. civ. ed industr.*, vol. XXXII, marzo 1884).

Le problème que j'ai traité ici se présente souvent dans les machines, et la disposition d'organes à laquelle il correspond est utilisée fréquemment dans l'industrie. Pour certains appareils et, spécialement, pour divers concasseurs et broyeurs, c'est cette disposition même qui constitue la partie principale du mécanisme.

Mais les constructeurs n'avaient à cet égard aucune règle fixe et en étaient réduits à des épures difficiles ou à des hypothèses trop éloignées de l'exactitude. Les règles que j'indique permettent de réaliser dans tous les cas la plus grande approximation possible et de fixer, sans tâtonnements, le point décrivant; je donne d'ailleurs l'expression de l'écart maximum compris entre l'arc donné et la courbe complète qu'on lui substitue.

38. Règles pratiques pour la substitution à un arc donné de certaines courbes fermées engendrées par les points d'une bielle en mouvement. Cas des bielles isoscèles et rectangulaires.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 4 juin 1883.

Les formules générales contenues dans la précédente Note fixent les conditions sous lesquelles il convient d'opérer la substitution à un arc donné d'une courbe fermée engendrée par les points d'une bielle en mouvement.

Le nombre de ces conditions se trouve inférieur au nombre des constantes nécessaires pour déterminer complètement les diverses pièces du mécanisme, et il est ainsi toujours possible, dans chaque cas particulier, d'obtenir une infinité de solutions.

Mais bien qu'il puisse être souvent avantageux de laisser aux problèmes de ce genre toute l'indétermination qu'ils comportent, afin de pouvoir disposer au besoin des quantités arbitraires pour satisfaire à des conditions accessoires, les constructeurs ont l'habitude de réduire le plus possible le nombre des indéterminées dans le but de simplifier à la fois le calcul et le tracé de leurs mécanismes.

Il est dès lors utile d'indiquer les simplifications qui résultent, dans les formules générales précédemment établies, des conditions supplémentaires auxquelles on s'assujettit d'ordinaire.

C'est dans cet ordre d'idées que j'ai étudié le cas, très fréquent dans la pratique, de la bielle isoscèle pour laquelle le point décrivant et le pied de la bielle sont à la même distance de la tête.

J'examine ensuite le cas de la bielle rectangulaire, où les directions qui

joignent le pied de la bielle au point décrivant et à la tête sont perpendiculaires entre elles.

Je termine enfin en faisant connaître le degré de précision que comporte l'application des formules trouvées afin de déterminer les limites de tolérance dans lesquelles il est permis de se mouvoir pour les dimensions à donner aux diverses pièces.

39. Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, dirigé par M. Resal, 1883, p. 245.

Pour obtenir d'un dynamomètre à lames toute la sensibilité dont il est susceptible, il est nécessaire, comme l'on sait, de donner aux lames qui le composent la forme d'un solide d'égale résistance.

L'intérieur des lames étant complètement plan, j'ai cherché, en appliquant les résultats obtenus dans mon Travail sur les solides d'égale résistance à face plane (n° 34), une forme de profil extérieur suffisamment exacte et facile à tracer.

Je suis ainsi arrivé à trouver un profil, d'une exécution extrêmement simple et qui, ainsi que je le démontre, conduit à une approximation très supérieure à celle que donne le tracé parabolique habituel.

Je démontre que, si l'on désigne par p le paramètre de la parabole des constructeurs, c'est-à-dire la quantité $\frac{e_0^2}{2l}$, où l et e_0 représentent respectivement la demi-longueur et la demi-épaisseur de la lame considérée, cette dernière dimension étant mesurée au milieu de la lame, on a les théorèmes suivants :

1° *Le tracé parabolique habituel des lames de dynamomètre ayant une largeur uniforme et une face plane n'est exact pratiquement que dans le cas où la quantité p est petite, et il conduit à une erreur à peu près égale à $\frac{p}{2}$.*

2° *L'erreur commise peut être rendue moindre que $\frac{1}{25}p$ en adoptant le tracé qui suit, pour l'explication duquel on suppose la pièce placée horizontalement et le point d'encastrement à droite de l'extrémité libre : Tracer d'abord la parabole ordinaire en la déplaçant vers la gauche d'une quantité égale à $\frac{p}{2}$. Prendre cette parabole pour profil dans la partie à droite de ce point ; prendre pour profil*

à gauche une courbe se raccordant avec la parabole précédente au point de départ, ayant une tangente verticale distante de $\frac{3}{10}p$ *de l'extrémité libre et venant se raccorder horizontalement avec la face plane du solide au point d'application de la force intérieure.*

40. Étude d'un appareil de broyage (système Huet).

Génie civil, 1er juillet 1883.

Le broyeur Huet présente une disposition ingénieuse susceptible d'applications assez variées; il était intéressant, à ce titre, d'en donner une théorie complète.

Cette étude, d'une complication réelle, se simplifie d'ailleurs notablement si l'on fait usage des formules que j'ai fait connaître dans diverses Communications précédentes (nos 35, 37, 38) sur les courbes décrites par les points d'une bielle en mouvement.

La question consiste à établir les relations qui lient entre eux les principaux éléments de la machine et à fixer surtout le degré de précision obtenu, c'est-à-dire la quantité dont peut varier pendant le travail l'écartement des deux secteurs.

Ces deux secteurs ont, l'un par rapport à l'autre, d'une part un mouvement de roulement et de l'autre un mouvement de glissement, et c'est la propriété caractéristique de cet appareil que les mâchoires oscillantes, animées du double mouvement dont nous venons de parler, restent à une distance sensiblement constante l'une de l'autre.

Je calcule successivement les expressions analytiques du glissement relatif des amplitudes des arcs utiles et de l'écartement des deux secteurs; j'en déduis alors la condition pour laquelle les variations de cet écartement sont aussi restreintes que possible.

Les diverses formules que j'obtiens ainsi sont assez simples pour permettre aisément les tâtonnements et elles donnent le moyen de résoudre toutes les questions qui peuvent se présenter à propos de l'appareil étudié.

41. Détermination de la loi de répartition des tensions dans une lame élastique de forme primitive arbitraire, enroulée sur un cylindre de section droite quelconque, lorsque le glissement est uniforme.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 22 octobre 1883.

Dans la théorie des transmissions par liens flexibles aussi bien que dans celle des freins à lame ou autres questions du même genre, on néglige les phénomènes dus à l'élasticité propre de la bande.

J'ai repris la question de manière à tenir compte de cet élément et à obtenir les relations qui existent alors entre les diverses forces que supporte une bande élastique enroulée sur un cylindre et frottant sur lui.

Il est clair que la lame flexible considérée est soumise, en chacun de ses éléments, à deux forces perpendiculaires, l'une normale, due à la pression de la jante, l'autre tangentielle, due au frottement. En écrivant l'équilibre entre ces forces et les efforts élastiques déterminés par l'enroulement, j'obtiens la loi de répartition des tensions correspondant au glissement uniforme dans le cas le plus général, c'est-à-dire sans restriction d'aucune sorte sur la nature de la section droite du cylindre, ni sur la forme primitive de la lame.

Ce sont les formules ainsi obtenues qui devront être substituées aux formules ordinaires, toutes les fois que les effets de l'élasticité ne pourront pas être négligés.

Si l'on applique en particulier ces formules au cas spécial où le cylindre est à section droite circulaire, le seul d'ailleurs qui se rencontre dans la pratique, on arrive au théorème suivant qui constitue, au point de vue des applications, l'un des principaux résultats de ce Travail :

Dans un frein à lame métallique, lorsque la lame est circulaire ou rectiligne avant l'enroulement, la loi de répartition des tensions pendant le glissement uniforme est la même, que l'on tienne compte de l'élasticité ou que l'on n'en tienne pas compte.

Le seul effet de la raideur de la lame est ainsi de diminuer la grandeur de l'arc embrassé, et c'est ce qui a été observé par tous les expérimentateurs qui se sont occupés de la raideur des cordes, mais la loi de répartition des tensions leur avait complètement échappé.

42. Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines.

Journal de l'École Polytechnique, 1883, LIIIe cahier, p. 59.

Ce Mémoire contient l'exposition détaillée, accompagnée de développements nouveaux, des résultats auxquels j'étais parvenu dans mes recherches précédentes sur les trajectoires des différents points d'une figure mobile dont deux points donnés sont assujettis à parcourir respectivement deux cercles fixes.

Ces courbes affectent des formes très variées et se prêtent ainsi aux combinaisons les plus diverses; elles peuvent être substituées souvent, dans la pratique, aux formes théoriquement exactes qui sont difficiles à réaliser et conduisent à des complications de mécanisme et à des pertes de travail exagérées. Cette substitution constitue aujourd'hui comme un principe de Mécanique appliquée qui se répand de plus en plus, principe qui consiste en somme à sacrifier la précision apparente du tracé au fonctionnement même de l'appareil.

Le présent Travail est une suite du Mémoire que j'ai publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (n° 16) sur une méthode d'approximation graphique applicable à un grand nombre de questions de Mécanique pratique. Je n'avais considéré dans celui-ci que le cas où l'on voulait utiliser un arc seulement des courbes dont il s'agit, c'est-à-dire le cas où, la pièce mobile ayant un simple mouvement alternatif, chacun de ses points décrit un arc limité qu'il parcourt alternativement dans les deux sens.

Mais il y a des cas, notamment ceux qui correspondent à des efforts exercés considérables ou bien à des vitesses très grandes, où il devient nécessaire de donner à la pièce mobile un mouvement plus continu et de faire parcourir à l'une de ses extrémités une courbe complète et fermée. On se trouve ainsi conduit à substituer à l'arc donné, non plus un arc simple, mais une sorte de lemniscate aplatie; l'approximation obtenue est moindre, mais cette infériorité est rachetée par des avantages d'un autre ordre et le sacrifice est commandé par la nature du problème.

Ce sont ces derniers cas que j'étudie dans ce second Mémoire. L'ensemble de ces deux Travaux, qui se complètent, constitue donc la théorie de ce qu'on pourrait appeler *la substitution avec le maximum d'approximation possible d'un tracé pratique à un tracé exact*.

J'indique, pour les diverses circonstances que présentent les applications, les moyens de réaliser le maximum de précision compatible avec les données du problème et je fais connaître en même temps le degré d'approximation obtenu, ce qui est l'élément essentiel pour fixer le choix que l'on doit faire.

43. Calcul de l'arc de contact d'une bande métallique flexible enroulée suivant certaines conditions données, mais quelconques, sur un cylindre circulaire.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 7 janvier 1884.

J'avais démontré dans un Travail précédent (n° 41), comme cas particulier de la théorie générale qui y était exposée, que la loi de répartition des tensions dans une lame élastique, de forme primitive circulaire ou rectiligne, enroulée sur un cylindre circulaire, est la même que si cette lame était parfaitement flexible; il résultait de là que, pour obtenir la relation existant entre les deux forces appliquées aux extrémités de la lame ainsi enroulée, relation indispensable pour les applications, il suffisait de connaître l'arc embrassé. C'est la grandeur de cet arc que je me suis proposé de calculer rigoureusement en tenant compte de l'élasticité de la lame, c'est-à-dire des forces résultant, pour les deux parties non enroulées, de cette élasticité.

Le calcul exige alors l'emploi des fonctions elliptiques. Je démontre que les formes des courbes élastiques obtenues sont les mêmes lorsque la lame est primitivement circulaire ou lorsqu'elle est primitivement rectiligne et je donne les équations convenant aux deux cas. Les conditions auxquelles on doit satisfaire pour le problème que nous avons en vue sont les suivantes:

Les extrémités de l'arc de contact doivent être sur la poulie, les deux courbes élastiques formées par les parties de la lame comprises entre les points d'attache et les points de contact sont tangentes à la poulie en ces derniers; les rayons de courbure en ces points sont égaux au rayon du cercle; la longueur de la lame est invariable; les points d'attache appartiennent à un système à liaisons complètes, c'est-à-dire que leurs coordonnées satisfont à trois relations; enfin les forces appliquées en ces points d'attache maintiennent le frein en équilibre et font équilibre en outre sur la poulie aux forces de frottement, puisque le glissement est uniforme.

J'arrive ainsi à un système d'équations simultanées, qui donne la solution complète du problème et que l'on peut résoudre numériquement par approximations successives. Mais ce procédé est trop compliqué pour les

applications. Aussi ai-je cherché à déduire de l'analyse qui précède des formules approximatives simples, susceptibles d'entrer dans la pratique; c'est ce que je suis parvenu à faire dans le Travail suivant.

44. Relation entre la puissance et la résistance appliquées aux deux points d'attache d'un frein à lame, lorsqu'on tient compte de l'élasticité de la lame.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences 28, janvier 1884.

Le problème du frein à lame, pris dans toute sa généralité, exige, pour être résolu d'une manière absolument rigoureuse, l'emploi des fonctions elliptiques, et j'avais fait connaître dans des Travaux précédents les formules qui en donnent la solution mathématique (n°s 41 et 43). Mais si l'on tient compte des conditions particulières, toujours remplies dans les applications, cette solution se simplifie notablement et se réduit à une formule unique d'une application très facile.

Je remarque, en effet, que, pour une lame parfaitement flexible, le module des fonctions elliptiques qui s'introduisent dans le problème serait égal à l'unité. Or, dans la pratique, on a intérêt à prendre la lame aussi flexible que possible, car on augmente ainsi l'arc embrassé et, par suite, l'énergie du frein. Aussi, dans les applications, le module est toujours très voisin de l'unité et on peut le supposer, dès lors, égal à cette limite. Ceci permet de ramener les fonctions elliptiques à de simples fonctions hyperboliques, fait disparaître la principale difficulté du calcul et conduit à des résultats extrêmement simples.

Je montre ainsi que, si l'on a une lame flexible encastrée à l'une de ses extrémités et soumise à l'autre à une traction, l'angle de chaque élément de lame avec la direction de la force est inversement proportionnel au rayon de courbure en cet élément. De plus, cet angle varie en raison inverse de la racine carrée de l'effort exercé.

En appliquant ce théorème à la lame flexible qui, enroulée sur la poulie, constitue le frein, j'arrive à la règle suivante, qui résume le résultat pratique de mes Travaux sur ce sujet :

Dans un frein à lame où la lame est rectiligne à l'état primitif, on a, entre la puissance et la résistance, lorsque le glissement est sur le point de se produire ou lorsqu'il a lieu uniformément, la relation

$$P_1 = P_0 e^{fA_1}\left[1 - \frac{f}{r}(EI)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{P_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{P_1^{\frac{1}{2}}}\right)\right],$$

où P_1 *est la puissance,* P_0 *la résistance, f le coefficient de frottement, r le rayon de la poulie,* E *le coefficient d'élasticité longitudinale,* I *le moment d'inertie d'une section normale par rapport à l'axe de flexion et* A_1 *l'arc qui serait embrassé par la lame si elle était parfaitement flexible.*

Cette formule permet évidemment le calcul de P_1 en fonction de P_0 par la méthode des approximations successives et l'opération, qui est d'une application immédiate, est très rapide.

45. Sur la position à attribuer à la fibre moyenne dans les pièces courbes.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 16 juin 1884.

Dans la théorie de la résistance des matériaux, on désigne sous le nom de *fibre moyenne* des pièces droites ou courbes, une ligne idéale que les auteurs définissent de l'une des manières suivantes : tantôt ils la considèrent comme le lieu des centres de gravité des sections normales; tantôt, ainsi que l'a fait M. Bresse, comme le lieu de leurs centres d'élasticité.

Quelle que soit la définition adoptée, on démontre, dans le cas des pièces droites, que les flexions doivent s'effectuer autour d'axes rencontrant cette fibre moyenne pour donner naissance à de simples couples, et, cette démonstration faite, on admet la même règle pour les pièces courbes.

Cette généralisation suppose, ainsi qu'on le fait remarquer d'ailleurs, que le rayon de courbure de la fibre moyenne est grand, par rapport aux dimensions transversales de la pièce.

Mais, bien que cette condition soit souvent remplie, elle peut cependant n'être plus admissible lorsqu'il s'agit de pièces à petit rayon de courbure; il importe alors de donner une nouvelle définition de la fibre moyenne qui, se confondant avec l'ancienne dans le cas des pièces droites, permette de s'affranchir, pour les pièces courbes, de la restriction précédente.

Si l'on se reporte à la démonstration par laquelle on prouve que, dans une pièce droite, la résultante de translation des forces élastiques dues à une flexion est nulle, quand l'axe de la flexion passe par le centre d'élasticité, on reconnaît que cette démonstration s'appuie essentiellement sur ce fait que les fibres élémentaires séparant deux sections normales ont même longueur à l'état naturel.

Or, dans la pièce courbe, ces fibres ont des longueurs proportionnelles à la distance qui les sépare de deux plans normaux extrêmes. Si donc on

prend la surface polaire enveloppe des plans normaux, on est conduit à attribuer à chaque élément de la section normale un coefficient de résistance variant en raison inverse de la distance de cet élément à la droite polaire correspondant à la section considérée.

Ceci posé, je démontre que l'on peut, dans la pratique, adopter la règle approximative suivante :

Lorsqu'on applique à une pièce courbe, de faible rayon de courbure, les formules établies pour les pièces droites, il convient de prendre pour définition de la fibre moyenne, non le lieu des centres de gravité ou d'élasticité proprement dits des sections normales, comme on le fait d'ordinaire, mais le lieu des centres de percussion de ces mêmes sections, correspondant, pour chacune d'elles, à la droite symétrique de la droite polaire par rapport au centre d'élasticité.

46. Sur un perfectionnement du vannage à papillon métallique pour turbines versant l'eau latéralement.

Génie civil, 5 juillet 1884.

Les inconvénients que présente l'immersion d'une turbine dans les eaux d'aval, très sensibles quand le vannage n'est pas ouvert en entier, deviennent très faibles quand le distributeur l'alimente sur toute la circonférence. Il est, dès lors, important, pour toutes les turbines susceptibles d'être noyées, d'avoir des vannages capables de débiter l'eau sur toute la périphérie. Il faut, de plus, que ces vannages soient robustes, d'un accès commode, d'un maniement facile et exigent peu de réparations.

Parmi les systèmes remplissant ces dernières conditions, l'un des plus simples est celui du papillon métallique à deux secteurs de MM. Béthouart et Brault pour les turbines versant l'eau latéralement, système qui offre cet avantage considérable que les pressions de l'eau s'y équilibrent exactement.

Mais si ce système est ainsi d'un maniement très facile, il présente ce très grave défaut de ne permettre l'ouverture que de la moitié du distributeur.

J'étudie les différents moyens qui s'offrent pour remédier à cet inconvénient et je suis ainsi conduit à un dispositif formé, en principe, de quatre secteurs étagés, s'ouvrant deux à deux en sens contraires, de façon que leurs augets ouverts correspondent à deux orifices seulement. Je diminue

de la sorte le nombre des coups de bélier qui se produisent lorsqu'un auget de la turbine passe de la partie du distributeur qui donne l'eau à celle qui n'en donne pas, ou inversement, et j'obtiens ainsi un appareil d'une construction très simple, d'un maniement aussi commode que celui de MM. Béthouart et Brault, mais donnant lieu à un rendement plus considérable.

47. Sur les soupapes de sûreté des chaudières à vapeur.

Génie civil, 26 juillet 1884.

Les soupapes ordinairement employées dans les chaudières à vapeur présentent cet inconvénient que, par le fait même de leur soulèvement, la pression qu'elles supportent devient immédiatement inférieure à la pression dans le réservoir de vapeur.

Elles ont dès lors une tendance constante à retomber sur leur siège tant que la pression intérieure ne dépasse pas sensiblement celle pour laquelle elles ont été établies et, si elles s'ouvrent quand la tension atteint cette limite, elles ne peuvent rester ouvertes tant qu'elle n'est pas notablement dépassée. Elles ne donnent ainsi un orifice permanent d'écoulement à la vapeur que lorsque la pression est supérieure au timbre et elles ne permettent pas par suite de régulariser la pression.

Pour qu'elles puissent atteindre ce but, il suffit, comme l'a fait M. Codron, d'augmenter la surface d'action de la pression sur la soupape au moment même où, par le soulèvement, cette pression diminue. On est ainsi conduit à la soupape à double siège.

Mais ce dispositif, qui offre de réels avantages, entraîne deux inconvénients : si l'on augmente le diamètre du petit siège, on fait croître la stabilité de la soupape dans le soulèvement, mais cette stabilité peut devenir trop grande, c'est-à-dire que la soupape peut ne plus retomber que pour une pression notablement inférieure au timbre ; si l'on diminue, au contraire, le diamètre du petit siège, l'obturateur se referme plus aisément et l'on peut éviter ainsi l'abaissement de tension signalé, mais cet obturateur ne se relève plus, d'une façon permanente, une fois fermé, que pour une pression supérieure au timbre, et l'appareil ne donne plus de garanties suffisantes.

La modification que j'indique a pour but d'éviter les pertes de vapeur trop considérables, tout en laissant à la soupape une grande stabilité dans le soulèvement. Elle résout pratiquement ce problème, d'un obturateur qui

reste ouvert dès que la pression dépasse légèrement le timbre, et se refermo dès qu'elle lui est redcvenue un peu inférieure; elle constitue ainsi un véritable régulateur de pression.

48. Sur l'équilibre et la déformation des pièces circulaires.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 3e série, t. X, p. 367.

Après les pièces droites qui sont surtout employées dans les constructions civiles, celles que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique sont les pièces circulaires, c'est-à-dire celles dont la fibre moyenne est un cercle.

L'objet de ce Travail est d'indiquer, pour ces dernières, la marche générale que l'on peut suivre, dans l'étude du problème général de la déformation d'une pièce soutenue par un nombre quelconque d'appuis fixes ou élastiques, formant ou non encastrement, et soumise à des forces extérieures quelconques.

Ce problème est celui qui se présente dans l'étude d'un grand nombre de pièces mécaniques et il offre à ce titre un réel intérêt. Les roues ordinaires, les poulies de transmission, les volants, les roues montées en tension, sont autant de cas particuliers, importants en pratique, qui rentrent dans le cas général que nous étudions.

Je démontre que, dans toutes les circonstances qui peuvent se présenter, les réactions d'un point d'appui quelconque, dans une poutre circulaire à plusieurs travées, peuvent toujours s'exprimer à l'aide des réactions des deux points d'appui immédiatement voisins et j'établis que les relations ainsi obtenues sont linéaires.

La démonstration que je donne de ce théorème, déjà connu d'ailleurs, est établie sans faire aucune hypothèse sur la nature des forces qui sollicitent la pièce circulaire et ne suppose pas que cette pièce ait une section constante.

Elle s'applique dès lors aussi bien pour une pièce ayant ses extrémités libres que pour un cercle, puisqu'on peut toujours imaginer que l'on ait complété la pièce considérée par un arc dont on suppose la section nulle.

Les conclusions obtenues sont vraies, non seulement pour les véritables points d'appui, mais aussi pour tous les points où s'exerce une action de grandeur finie linéaire par rapport aux déformations correspondantes.

Je termine ce Mémoire en montrant comment l'on peut diriger le calcul dans le cas d'une pièce circulaire complète, soutenue en n points par des

appuis formant encastrement et soumise à une force extérieure unique agissant en un point de l'une des travées.

Ce problème une fois résolu peut être considéré comme donnant la solution du problème général, puisqu'il est toujours permis dans la pratique de remplacer une force répartie d'une manière continue par un certain nombre de forces isolées. C'est même le procédé habituellement employé, en raison de ce qu'il se prête mieux à l'application des méthodes graphiques.

49. Théorie du frein à lame.

Journal de l'École Polytechnique, LIVe Cahier, 1884.

Le frein le plus habituellement employé dans les machines est le frein à lame métallique frottant sur la jante d'une roue.

Pour établir la théorie de cet appareil, on n'avait employé jusqu'ici que des méthodes approximatives; tantôt l'on supposait que la pression était uniformément répartie sur la surface de contact, tantôt l'on admettait que, la lame étant parfaitement flexible, les tensions et par suite les pressions, suivaient la loi exponentielle bien connue qui régit le frottement d'une corde enroulée sur un cylindre.

Le premier procédé a évidemment l'avantage de la simplicité, mais il s'écarte notablement de la vérité des faits; quant au second, il laisse de côté l'élasticité de la lame qui n'est généralement pas négligeable.

Je me suis proposé d'indiquer une méthode nouvelle pour cette théorie, en m'appuyant sur les résultats auxquels j'étais parvenu dans diverses Communications insérées aux *Comptes rendus* (n°s 41, 43, 44); c'est l'exposé de cette méthode qui constitue le présent Mémoire.

50. Calcul des dimensions à donner aux rails flexibles d'une voie aérienne.

Génie civil, 21 février 1885.

Lorsqu'on établit une voie aérienne pour transmettre à distance des wagonnets chargés, la première question à résoudre consiste dans le calcul des dimensions à donner à cette voie (corde, câble métallique ou chaîne) pour qu'elle soit capable de résister à la tension. On est conduit dès lors à chercher quelle est la tension correspondant à un point donné et, en particulier, quelle est la position du poids pour laquelle ladite tension devient maxi-

mum. Il est clair que, ce maximum une fois trouvé, la détermination des dimensions de la voie est immédiate.

C'est ce problème, dont une solution approximative, mais simple, m'avait été demandée par des constructeurs de voies aériennes, que j'ai résolu dans ces conditions.

51. Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 19 janvier 1885. Journal de l'École Polytechnique, LVe Cahier, 1885.

Ce Volume, soumis à l'examen de MM. Phillips, Resal, Tresca, a été l'objet d'un Rapport de M. Phillips, à la suite duquel l'Académie a voté l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*. Voici la reproduction de ce Rapport :

« Le Mémoire de M. Léauté a pour objet principal l'étude des oscillations à longues périodes des régulateurs dans les machines mues par des moteurs hydrauliques et la recherche des moyens propres à prévenir ces oscillations.

» Ce problème est l'un de ceux qui appellent depuis longtemps l'attention des constructeurs. Les oscillations à longues périodes détruisent en effet toute régularité en produisant un état périodique indéfini qui présente les plus graves inconvénients. C'est donc une des plus importantes questions de la Mécanique appliquée que M. Léauté s'est proposé de résoudre.

» Réduit à ses termes fondamentaux, le problème revient à déterminer le mouvement d'une machine après une perturbation quelconque capable de mettre en jeu le régulateur. Ainsi posé, il n'a encore été traité que par l'un de nous (1) qui, tenant compte de l'inertie des diverses pièces de la machine, a donné l'équation du mouvement et montré qu'elle pouvait être ramenée à une équation différentielle du premier ordre dont il a fait connaître l'intégrale générale. D'un autre côté, notre confrère M. Rolland, dans ses recherches sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, avait rattaché la production des oscillations à longues périodes à l'influence qu'exerce l'inertie des boules sur le mouvement de ce mécanisme.

» Mais, dans ces deux séries de travaux, le seul cas examiné est celui des appareils de régulation à action directe. La question restait donc entière

(1) Resal, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 218.

pour le cas de l'action indirecte, c'est-à-dire pour celui où l'office du régulateur est d'établir ou d'interrompre, au moyen d'embrayages, la communication de la vanne avec le moteur.

» L'auteur a eu l'idée très heureuse d'un mode de représentation graphique des mouvements simultanés de la machine et de la vanne et qui consiste à prendre pour abscisses les ouvertures de vannes et pour ordonnées les vitesses correspondantes de l'un des arbres animés d'un mouvement de rotation continu. Le mouvement est alors figuré par certains circuits qu'il désigne sous le nom de *cycles* et qui sont formés, d'une part, de verticales correspondant aux périodes où le mécanisme de commande du vannage n'est pas embrayé et, d'autre part, d'arcs de courbes correspondant à l'ouverture ou à la fermeture de la vanne quand ce mécanisme est en action.

» Lorsqu'un de ces cycles est fermé, c'est-à-dire lorsqu'il forme une ligne continue, le mouvement de la machine repasse indéfiniment par les mêmes phases, et les oscillations à longues périodes ont pris naissance et se maintiennent.

» Le problème est ainsi ramené à déterminer dans quelles conditions un cycle fermé peut se produire. Pour cela, il faut tout d'abord connaître exactement la nature des courbes qui forment un cycle.

» C'est ce que cherche M. Léauté qui, après avoir obtenu l'équation différentielle du mouvement simultané de la machine et de son vannage, transforme son intégrale générale, en y introduisant, à l'aide de l'intégration par parties, les polynômes de M. Hermite, et obtient ainsi les équations des courbes d'ouverture et de fermeture. Constamment préoccupé d'ailleurs du sens mécanique des formules qu'il établit, l'auteur élimine successivement, ainsi que cela était indispensable, les quantités introduites inutilement par le calcul ou sans influence sur le phénomène qu'il étudie. Il montre de la sorte que, pour l'étude des oscillations à longues périodes, les courbes de déplacement de la vanne peuvent être considérées comme des paraboles et, ayant ainsi simplifié le tracé du cycle, il trouve aisément à quelle condition l'existence d'un cycle fermé est impossible.

» L'application du procédé graphique qui vient d'être indiqué, au cas idéal d'un régulateur sans frottement et à celui d'un appareil ordinaire où les frottements ne sont pas négligeables, met en lumière l'importance considérable qu'exercent, au point de vue des oscillations à longues périodes, les résistances passives qui s'opposent à l'embrayage et au débrayage du mécanisme de commande

» M. Léauté peut ainsi montrer nettement les causes du phénomène et

donner la condition à laquelle doivent satisfaire les différentes caractéristiques de la machine et de l'appareil de régulation pour que les oscillations dont il s'agit ne se produisent pas.

» Il obtient ainsi une relation très simple entre la force vive totale de la machine, la vitesse que le mécanisme de commande imprime au vannage, les retards causés par le frottement dans l'action de ce mécanisme et le degré d'isochronisme du régulateur. Cette relation fait connaître la limite à laquelle la différence des vitesses correspondant à l'embrayage et au débrayage doit rester inférieure pour que les oscillations à longues périodes soient impossibles, et permet dès lors de reconnaître si le bon fonctionnement d'un appareil de régulation est assuré dans les diverses conditions où il est appelé à se trouver.

» Le problème posé se trouve ainsi complètement résolu et sous une forme pratique.

» M. Léauté toutefois ne s'en tient pas là et, s'appuyant sur les résultats de son analyse, il montre comment sa théorie conduit à une méthode rationnelle d'établissement des régulateurs à action indirecte. A ce point de vue, cette théorie mériterait de prendre place, dans les Traités de Mécanique, à la suite de celle des volants. Elle pourrait éviter aux praticiens des tâtonnements et des mécomptes. Il suffirait d'ailleurs, pour la mettre à la portée de tous, de la débarrasser des calculs qui servent à fixer le degré d'approximation obtenu et à justifier les réductions opérées. Sous ce rapport, l'auteur a poussé très loin le souci de la rigueur, et cette suppression serait sans inconvénient. Quelques développements supplémentaires, indiqués d'ailleurs succinctement dans le Mémoire, achèveraient de la rendre claire. Nous engageons M. Léauté à faire ce travail, qui sera d'un grand intérêt et fort utile pour tous ceux qui ont à installer des moteurs hydrauliques.

» Après s'être rendu compte dans tous ses détails du mode de fonctionnement des appareils ordinaires de régulation à action indirecte et avoir fait ressortir que leur rapidité d'action est toujours obtenue au détriment de la régularité même du mouvement, l'auteur signale les précautions pratiques à prendre pour tirer le meilleur parti possible des appareils existants. Il montre ensuite l'avantage que peuvent présenter les mécanismes de commande à action intermittente, et termine en indiquant quelles sont, en principe, les transformations qu'il conviendrait d'adopter pour obtenir des appareils à la fois énergiques et rapides. L'une des solutions auxquelles le conduit sa théorie est celle indiquée par M. Marcel Deprez en 1876.

» En résumé, le remarquable Travail de M. Léauté contient la solution complète de l'une des questions les plus importantes et les plus ardues de la Mécanique appliquée. Nous avons l'honneur de proposer à l'Académie d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Les résultats théoriques auxquels je suis parvenu dans ce Travail ont été vérifiés par M. l'Ingénieur en chef Bérard [1], dans une série d'expériences qu'il a entreprises sur deux turbines, l'une de 50 chevaux, l'autre de 10 chevaux et qu'il a communiquées à l'Académie. Ces expériences ont confirmé d'une façon complète mes conclusions.

---

[1] A. Bérard, *Résultats d'expériences entreprises pour contrôler les conclusions du Travail de* M. Léauté, *relatif aux oscillations à longues périodes* (*Comptes rendus*, 11 mai 1885).

11171 Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.